ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ КАК МЕТОД ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЗНАНИЙ

Исчисление высказываний является грубой моделью представления знаний. Основной ее недостаток в том, что высказывание здесь рассматривается как единое целое, без анализа его внутренней структуры. Это ограничивает возможности ИВ при моделировании сложных силлогических построений. Элементарный пример, часто приводящийся в таких случаях. Имеется классический силлогизм:

a. Все люди смертны;
b. Сократ - человек;
c. Следовательно, Сократ смертен.

С точки зрения логики, вывод здесь безупречен, но он уже выходит за рамки ИВ. В самом деле, с помощью пропозициональных связок и букв, его можно записать в виде следующей формулы:

$$(a \wedge b) \rightarrow c.$$

Но эта формула необщезначима! А это значит, что логика высказываний не позволяет корректно выразить приведенный силлогизм. Позже мы вернемся к этому примеру и разрешим его, но уже в рамках более гибкой формальной логики, в рамках исчисления предикатов.

1. Понятие о предикатах

Если высказывание отражает какой-либо факт и далее оперирует с ним как с единой формулой, не разделяя его, скажем, на субъекты и объекты, то предикатная форма, напротив, отображает данный факт уже как взаимодействие, отношение или свойство некоторых сущностей. Это отношение принято выделять прописными буквами перед скобками, в которых указываются те или иные сущности, находящиеся в данном отношении.

Рассмотрим несколько предложений.

a) Лена и Таня сестры
b) грибы в лесу,
c) капля долбит камень,
d) снег белый,
e) мальчик послал книгу брату.

В правилах исчисления предикатов эти предложения можно записать следующим образом.

а') СЕСТРЫ (*Лена, Таня*),
б') В (*лес, грибы*),
в') ДОЛБИТЬ (*капля, камень*),
г') БЕЛЫЙ (*снег*),
д') ПОСЫЛАТЬ (*мальчик, брат, книга*).

В первом предложении выделено отношение родства, во втором - предлогом *В* - пространственные отношения. В предложении *в')* выделено действие между субъектом и объектом, в предложении *г')* - свойство (в данном случае - цвет), в предложении *д')* - также действие. Но рассмотрим эти примеры подробнее.

То, что стоит перед скобками и выделено прописью, называется *предикатным символом* (*предикатной константой*)**.** То, что стоит в скобках, называется *термами***.** Каждый терм занимает свое *место***.** Предикатные символы могут быть предлогами, существительными, глаголами, прилагательными и т.п.. Терм, как правило, существительное или то, что его заменяет. Все это вместе образует предикатную формулу (или короче - *предикат*).

Термов может быть несколько. По их количеству предикаты разделяются на одноместные (*г'*), двуместные (*а', б', в'*), трехместные (*д'*) и т.д. Предикатная формула еще называется *атомом***.** Но и термы бывают разными. В примере *а')* оба терма обозначены вполне конкретно - *Лена, Таня.* В этом случае они называются *индивидные константы***.** Во втором предикате оба терма заданы в самом общем виде: какие-то грибы в каком-то лесу. Их можно просто обозначить через буквы *x* и *y* - они так и называются - *индивидные* (*предметные*) *переменные***.** Сами же предикатные символы, которые, как мы видели, много чего отображают, также обозначаются буквами - прописными, латинского алфавита: *P, R, M...* Иногда к ним добавляются индексы: $P_1, P_2, \ldots Pn,$ иногда указывают число мест: $P_к^1, P_к^2 \ldots$. Говоря о терме, мы не упомянули еще один его вид: терм может быть выражен через функцию.

Разберем все сказанное на примерах.

1) *ПИСАТЬ* (*Лермонтов, "Демон"*). "Лермонтов написал "Демона"" - все ясно: *ПИСАТЬ* - предикатная константа, двуместный предикат, оба терма - индивидные константы. Обозначим через *X* множество стихотворений Лермонтова. Тогда предикат вида: *ПИСАТЬ* (*Лермонтов, x*) означает:

"Лермонтов написал какое-то стихотворение". А вот предикат: *ПИСАТЬ* (y, x), где под y понимается какой-то человек, означает: "кто-то написал что-то", x и y здесь - индивидные переменные.

2) Обозначим через g некоторую функциональную константу, например, "быть варёным". Если картофель обозначить через s, то предикат *НА* (*стол,* $g(s)$) теперь истолкуется как "на столе варёная картошка". Пусть f - функциональная константа "быть отцом", а m - функциональная константа "быть матерью". В этом случае предикат P (f(*Лена*)*,* m(*Лена*)) следует истолковать просто как *РОДИТЕЛИ*. (Тот же результат, впрочем, даст и более общая формула: $P(f(x), m(x))$, где x - один и тот же ребенок).

Из рассмотренного можно сделать некоторые выводы. Во-первых, термы нельзя менять местами. Иначе получится, что на картошке стоит вареный стол, а Демон написал "Лермонтова". И во-вторых: не следует путать предикатный и функциональный символы. Предикат *МАТЬ* (x,y) означает: y есть мать x. Либо это правда, либо это неправда, поэтому область значений предиката [1,0] или [И,Л]. Функция *м*(x) означает "быть матерью", равенство *м*(x) $= y$ - "матерью x является y". Область определения x - вообще говоря, все человечество, область значений y - все женщины определенного возраста.

2. Исчисление предикатов как аксиоматическая система

ИП - аксиоматическая система, построенная согласно формальной теории $F = (A, V, W, R)$.

Словарь ИП (A) содержит:

индивидные константы $a, b, c...$;
предметные переменные $x, y, z,...$;
функциональные константы f, g, h ..;
высказывания $p, q, r, s,....$;
предикатные константы $P, Q, R,..$.

Исчисление предикатов, в определенном смысле, продолжение и расширение исчисления высказываний, поэтому в словарь включены все те же пропозициональные связки $\wedge$, $\vee$, *НЕ* , $\rightarrow$, $\equiv$. Но перечень логических знаков в ИП расширяется еще двумя, называемых кванторами: $\forall$ и $\exists$. Квантор $\forall$ читается как "все", "для всех", "всякий", "каков бы ни был" и т.п. Поэтому он называется *квантором всеобщности* (*общности*). Квантор $\exists$ читается как "некоторый", "хотя бы один", "существует" и т.п.. Поэтому он называется *квантором существования*. Так, например, выражение $\forall xP(x)$ читается: "для любого x выполняется условие $P(x)$". Выражение $\exists yP(y)$ - "существует хотя бы один y, при котором выполняется $P(y)$ (т.е. $P(y) = И$)".

Множество синтаксических правил V ИВ применимо и в ИП. Правильно построенные формулы в рамках исчисления высказываний остаются ппф и в исчислении предикатов. Добавляются правила:

атом есть формула и

если $P(x)$ формула и x - переменная, то $\forall xP(x)$ и $\exists xP(x)$ - формулы.

Каждому квантору соответствует только одна переменная, в наших примерах x или y. Эта переменная называется квантифицированной, она пишется сразу за квантором. Область действия квантора - формула, к которой применяется эта квантификация. Каждое вхождение квантифицированной переменной в область действия квантификации является *связанным*, любая другая переменная в данной области, не являющаяся связанной, называется *свободной*.

Рассмотрим формулу $\forall x(R(x,y) \to \exists y(M(x,y,z) \wedge Q(x,y)))$. Здесь все вхождения переменной x связанные, т.к. попадают в область действия квантора $\forall x$, которая включает в себя все предикаты: R,M и Q (следите за скобками). А вот первое вхождение переменной y (в предикате R) - свободное. В дальнейшем y попадает в область квантификации $\exists y$ и является связанным (в предикатах M и Q). Переменная z - свободная.

Каждую предикатную формулу можно интерпретировать, т.е. оценить ее как *И* или *Л*. При этом можно оценить "перекрытие" кванторов на одну и ту же переменную:

$\forall x \exists x P(x)$ интерпретируется как $\exists x P(x)$, а

$\exists x \forall x P(x)$ интерпретируется как $\forall x P(x)$.

Это и понятно: вместо того, чтобы говорить " из всех x существует хотя бы один x, при котором P истинен", достаточно сказать просто: "существует хотя бы один x и т.д.". И наоборот, чтобы не говорить странное словосочетание "существует хотя бы один x, такой, что для всех x P истинен", достаточно сказать "для всех x ...". (Для запоминания: из двух кванторов "прав" самый правый).

Будем понимать под A предикат $A(x,y)$ и отметим важные соотношения:

$$\forall x\,\forall yA = \forall y\,\forall xA\,,$$
$$\exists x\exists yA = \exists y\exists xA, \qquad (6.1)$$

т.е. одноименные кванторы можно менять местами. Иное дело разноименные кванторы. Здесь выполняется только такое условие:

$$\exists x\,\forall yA \rightarrow \forall y\exists xA\,. \qquad (6.2)$$

Последняя импликация поясняется следующим примером. Пусть имеем для целых чисел истинное утверждение: $\forall y\exists x(x+y=0)$ (для любого y найдется такой x, что выполняется равенство $x+y=0$). Переставим кванторы: $\exists x\,\forall y(x+y=0)$. Получим выражение: существует такой x, при котором выполняется условие ($x+y=0$) для всех y, что некорректно.

Система базовых аксиом W в ИП может быть принята такой же, как и в ИВ. Однако к ней необходимо добавить аксиомы, учитывающие появление кванторов:

$$\text{(A4)} \qquad \forall xP(x) \rightarrow P(y),$$
$$\text{(A5)} \qquad P(y) \rightarrow \exists xP(x).$$

А4 говорит, что если $P(x)$ истинен для всех x, то он истинен и для некоторого y из этого же универсума (если все яблоки в данном ящике красные, то одно-то красное уж найдется всегда).

А5 говорит, что если найдется y, при котором $P(y)$ истинен, то верно, что найдется хотя бы один x, для которого предикат $P(x)$ тоже истинен (даже если x совпадает с y). (Если среди яблок в данном ящике нашлось одно сладкое, то уже существует по крайней мере одно сладкое).

Правила вывода R здесь остаются прежними: правило подстановки и правило заключения, но они дополняются еще одним правилом, учитывающим свойства кванторов. Это правило называется правилом ***специализации***. Суть его в следующем: если ппф $\forall xP(x)$ истинна и b - некоторая константа, то формула $P(b)$ также истинна, т.е. справедливо $\forall xP(b) = P(b)$. Пусть, например, имеются формулы $\forall x(P(b) \rightarrow Q(x))$ и $P(b)$. Если они истинны, то, применяя специализацию, имеем ряд теорем:

$$\forall x(P(b) \rightarrow Q(b)),$$

т.е. $\quad P(b) \rightarrow Q(b), \quad$ (*специализация*)

$\quad Q(b) \quad$ (*modus ponens* с $P(b)$).

3. Примеры предикатов

Разберем несколько примеров построения предикатов.

1. "А вы, друзья, как ни садитесь, все ж в музыканты не годитесь". Обозначим через x - способ рассаживания музыкантов, y - качество исполнения, $P(x,y)$ - предикат, связывающий способ рассаживания и качество исполнения. Окончательная формула: $\forall x \overline{P}(x,y)$.

2. "Кто не работает, тот не ест":

$$\forall x(P(x) \to E(x))$$

.Здесь x - человек, P - предикатная константа *РАБОТАТЬ*, E - предикатная константа *ЕСТЬ*.

3. "Болтун - находка для шпиона": $\forall x \exists y P(x,y)$, где "роли исполняют": x - *болтун*, y - *шпион*, P - *НАХОДКА*.

4. Приведенный в начале главы пример силлогизма о Сократе можно переписать так: для всех x, если x - человек, то x - смертен; Сократ человек; (следовательно) Сократ смертен. Обозначим через M "быть смертным", через H "быть человеком". Мы приходим к следующей формуле:

$$\forall x((H(x) \to M(x)) \wedge H(\text{Сократ})) \to M(\text{Сократ})).$$

(Сократ здесь - индивидная константа).

5. "В каждом городе найдется краевед, который покажет достопримечательности".

$$\forall x(G(x) \to \exists y(S(x,y) \wedge P(z,y))).$$

(Если x - город (G), то найдется такой краевед (y), *ЖИВУЩИЙ - В* (S), который *ПОКАЖЕТ* (P) достопримечательности z).

Здесь к месту отметить некоторые особенности при переводе с живого языка на язык предикатов. Имеется русская фраза: "Каждый студент учится". В логической интерпретации это можно отобразить такой формулой:

$$6.\ \forall x(S(x) \to L(x)),$$

где *S СТУДЕНТ, L - УЧИТЬСЯ*.

Но вот есть другая фраза: "Некоторые студенты спортсмены". Ее логический эквивалент

$$7.\ \exists x(S(x) \wedge P(x))\quad (P\text{- СПОРТСМЕН}).$$

Фразы 6 и 7 очень похожи, но замена прилагательного "каждый" на "некоторые" потребовала не только замены квантора $\forall$ на $\exists$, но и замену связки $\to$ на $\wedge$.

И еще. Формулы ИП часто можно писать по-разному на один и тот же словесный текст, пользуясь разной степенью "детализации". Например, короткую фразу из примера 3 можно записать более подробно:

$$8.\ \forall x((M(x) \wedge B(x)) \to \exists y P(x,y)),$$

где *M - ЧЕЛОВЕК, B - БОЛТУН, P - НАХОДКА, y* - *шпион*.

А теперь вам предлагается несколько упражнений.

1. Попробуйте представить в виде предикатных формул следующие фразы.

-Кто весел, тот смеется.
-Кто-то привык за победу бороться.
-И никто ему по-дружески не спел.
-Всяк сверчок знай свой шесток.
-И никто не узнает, где могилка моя.
-А девушке в семнадцать лет какая шапка не пристанет!
-Все цветы мне надоели, кроме розы.
-Есть многое на свете, друг Гораций,
что и не снилось нашим мудрецам.
-Немногие вернулись с поля,
не будь на то Господня воля,
не отдали б Москвы.

2. Пусть *L* означает ЛЮБИТЬ, *ц* - цветы, *к* - конфеты, *x* - девушка. Переведите на русский язык выражения:

a) $\forall x L(x,ц)$,

b) $\exists x \overline{L}(x,k)$,

c) $\exists x L(x,к)$,

d) $\exists x(L(x,ц) \wedge L(x,к))$,

e) $\overline{\exists} x(\overline{L}(x,k) \to \overline{L}(x,ц))$.

4. Преобразование формул

Так же, как и в исчислении высказываний, формулы ИП могут быть общезначимыми, выполнимыми (нейтральными) или невыполнимыми (универсально ложными). Вообще говоря, это можно проверить, построив таблицу истинности. Но как это сделать, если предикаты содержат переменные, значения которых в общем случае могут меняться неограниченно? Особенную сложность придает наличие кванторов. Доказать общезначимость при таких условиях совсем не просто. Более того, было показано, что вообще невозможно найти универсального метода установления факта общезначимости квантифицированных выражений, так что даже говорят о неразрешимости исчисления предикатов. Но все это - в общем случае. Практически выполнимость многих формул устанавливать удается, если обозначена область D, в которой связная переменная x принимает свои значения. Если при этом известны истинностные значения формул $A(x)$ и $B(x)$, то легко определяются значения и для формул $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$ и др..

Формула $\forall x A(x)$ *получает значение И, если А получает значение И для каждого х из D.*

Формула $\exists x A(x)$ *истинна, если А истинна хотя бы при одном значении х из D.*

Пусть, например, x принимает значения в области $D = (1,2,3)$, и известно, что $A(1) = Л$, $A(2) = И$, $A(3) = Л$. Формула $\forall x A(x)$ означает: для всех x $A(x)$ истинна. Это условие у нас не выполняется, поэтому $\forall x A(x) = Л$. Формула $\exists x A(x)$ означает: существует x, при котором $A(x)$ истинна. Очевидно, что здесь $\exists x A(x) = И$.

Были найдены процедуры, позволяющие устанавливать общезначимость некоторых ппф, в этом смысле стали говорить, что исчисление предикатов является полуразрешимым. Что же касается свободных переменных, то в большинстве случаев их достаточно *конкретизировать*, т.е. заменить на некоторые постоянные.

При преобразовании формул ИП используются те же приемы: снятие и ограничение отрицания, исключение импликации и эквивалентности, применение законов алгебры логики и правил равносильности и т.п.. При действиях со связками необходимо учитывать особенности квантификаций.

Пусть имеется формула A, не содержащая переменную x. Очевидно, в этом случае она не подпадает под действие квантора по x, т.е. $\forall x A = A$ и $\exists x A = A$. Пусть теперь имеется формула B, содержащая свободную переменную x: $B = B(x)$. Тогда справедливы следующие равносильности:

$$\forall x\, B(x) \vee A = \forall x\,(B(x) \vee A),$$
$$\forall x\, B(x) \wedge A = \forall x\,(B(x) \wedge A),$$
$$\exists x\, B(x) \vee A = \exists x\,(B(x) \vee A),$$
$$\exists x\, B(x) \wedge A = \exists x\,(B(x) \wedge A). \qquad (6.3)$$

Если же формулы A и B обе содержат свободную переменную x, то справедливы равенства:

$$\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x) = \forall x\,(A(x) \wedge B(x)),$$

$$\exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x) = \exists x\, (A(x) \vee B(x)). \qquad (6.4)$$

(Квантор $\forall$ можно распределять по $\wedge$ (*И*), квантор $\exists$ можно распределять по $\vee$ (*ИЛИ*)).

Дело осложняется, если требуется распределить квантор $\forall$ по *ИЛИ*, а квантор $\exists$ по *И*. В этом случае равносильности, подобные (6.4), не выполняются. Тогда исходят из следующих соображений.

Любая связанная переменная в ппф может принимать какие угодно наименования, так что можно написать, например: $\forall xA(x) = \forall zA(z)$ (то же и для $\exists$). Это действие называется *переименованием переменных*. Всегда стараются сделать так, чтобы каждому квантору соответствовала только одна переменная. Это значительно облегчает работу с кванторами. В дальнейшем мы будем широко этим пользоваться. Вот и в данном случае:

$$\forall xA(x) \vee \forall xB(x) = \forall xA(x) \vee \forall zB(z) = \forall x\, \forall z(A(x) \vee B(z))$$

$$\exists xA(x) \wedge \exists xB(x) = \exists xA(x) \wedge \exists zB(z) = \exists x\, \exists z(A(x) \wedge B(z)). \qquad (6.5)$$

(При выносе кванторов за скобки теперь уже использовались соотношения (6.3), т.к. $B(z)$, например, не зависит от x и т.п.).

Этот же прием можно использовать и в равенствах (6.4), т.е. справедливо: $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x) = \forall x\, \forall z(A(x) \wedge B(z))$ и т.п..

Здесь и в дальнейшем будем обозначать для удобства:

$$\overline{\forall xP(x)} \Rightarrow \overline{\forall} xP(x) \text{ и } \overline{\exists xP(x)} \Rightarrow \overline{\exists} xP(x).$$

Из общего смысла квантификаций нетрудно понять следующие равенства преобразования отрицаний:

$$\overline{\forall} xP(x) = \exists x\overline{P}(x);\ \overline{\exists} xP(x) = \forall x\overline{P}(x),$$

(6.6)

откуда легко получаются правила замены одного квантора другим:

$$\forall xP(x) = \overline{\exists} x\overline{P}(x);\ \exists xP(x) = \overline{\forall} x\overline{P}(x).$$

(6.7)

В процессе преобразований нам потребуются новые термины. Назовем *литералом* атом или его отрицание; *дизъюнктом* - дизъюнкцию литералов (в ИП это чаще называют *предложением*), *матрицей* - формулу, не содержащую квантификаций.

Если мы имеем матрицу, то дальнейшая работа с ней, в сущности, сводится к преобразованиям, аналогичным тем, которые мы проделывали с формулами исчисления высказываний. Да и цели-то бывают, в общем-то, те же: преобразование и представление в канонических (нормальных) формах, доказательство общезначимости (или невыполнимости), определение логического следствия (чаще всего по методу резолюций). Но для этого нужно научиться получать матрицу, т.е. научиться корректно переходить от формул с квантификациями к формулам, уже не содержащим никаких кванторов. Но сперва еще раз о переименованиях связных переменных, только более подробно.

5. Стандартизация переменных

Связные переменные находятся под действием квантора и поэтому переименовывать их можно только одновременно с квантифицированной переменной, стоящей после квантора. Совершенно безразлично, как обозвать квантифицированную переменную. Если у нас есть формула $\forall xP(x)$, то ее можно переобозначить, например, $\forall zP(z)$. Значение истинности ппф при этом не изменится. Такой прием называется переименованием. Им пользуются для разделения переменных с тем, чтобы каждый квантор имел свою, свойственную только ему, переменную. Выше мы уже пользовались этим приемом при выводе соотношений (6.5). Если в формуле $\forall x(P(x)\rightarrow \exists x(R(x,z)))$, провести переименование, то можно получить, например, выражение $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(R(y,z)))$, ($z$ просто свободная переменная). Такой прием разделения переменных носит еще название *стандартизации*.

6. Исключение квантора существования

Если A не содержит x, то очевидно: $\forall xA = A$ и $\exists xA = A$. "Очевидно" - потому что кванторы здесь ничего не определяют и не дают. Это элементарный пример исключения кванторов.

Рассмотрим теперь формулу $\exists xP(x)$ (существует хотя бы один x, при котором $P(x) = И$). Пусть этот x будет равен c, тогда указанная формула запишется просто $P(c)$. Константа c любая, однако, она не должна совпадать с другими символами, применяемыми в других формулах. Это - второй пример исключения квантора существования. Он касается случая, когда сам квантор $\exists$ не находится в области действия какого-либо квантора общности.

Рассмотрим теперь формулу $\forall x\exists yP(x,y)$ (для всех x существует по крайней мере один y такой, что выполняется предикат $P(x,y)$). Ясно, что y, удовлетворяющий этому условию, как-то зависит от x. Эту зависимость можно отобразить с помощью некоторой функции, например, $g(x)$. Эта функция теперь заменяет y, а квантор существования можно просто убрать:

$$\forall xP(x,g(x)).$$

Функция типа $g(x)$, отображающая каждое значение x в "тот самый y", называется функцией Сколема или сколемовской.

Особенности:

1)если квантор $\exists$ стоит перед квантором общности $\forall$, то он не находится в области его действия и поэтому заменяется, как в прежнем примере, некоторой константой:

$$\exists x \forall yP(x,y) = \forall yP(a,y).$$

2)если квантор $\exists$ находится в области действия нескольких кванторов общности, то соответствующая его переменная заменяется сколемовской функцией от соответствующего числа переменных (мест):

$$\forall x \forall y \forall r \exists wP(x,y,r,w) = \forall x \forall y \forall rP(x,y,r,g(x,y,r)) -$$

"собственная" переменная квантора существования w заменяется сколемовской функцией g, зависящей от всех квантифицированных переменных, в сфере действия которых она находится.

3) Следующий пример говорит сам за себя:

$$\exists x \exists yP(x,y) = P(a,b).$$

4)Еще один пример: $\forall x[P(x,y) \wedge \exists y(M(y,z) \vee R(y,z,q))] = \forall x[(P(x,y) \wedge (M(g(x),z) \vee R(g(x),z,q))]$.

Сколемовская функция $g(x)$ заменяет y во всех местах его вхождения в области действия квантора $\exists$.

Рассмотрим и осмыслим теперь такой обобщающий пример:

5)Дано: $\exists z \forall x \exists u \forall y \forall r \exists w \exists s \forall v \exists qM(z,x,u,y,r,w,s,v,q)$.

После сколемизации:

$$\forall x \forall y \forall r \forall vM(a,x,f(x),y,r,g(x,y,r),h(x,y,r),v,p(x,y,r,v)).$$

7. Предваренная форма

Полученная только что, после сколемизации, формула имеет вполне определенный вид. Она состоит из цепочки кванторов, называемой *префиксом* и бескванторной формулы, называемой *матрицей*. Представить какую-либо формулу в виде префикса и матрицы - это значит представить ее в *предваренной форме*. Особенность предваренной формы в том, что все кванторы оказываются вынесенными влево за пределы общей формулы, а часть, оставшаяся без кванторов, может быть подвергнута всем возможным преобразованиям, в частности, быть представленной в конъюнктивной нормальной форме, такой необходимой нам для реализации принципа резолюции.

Для любой логической формулы существует логически эквивалентная ей предваренная форма.

Это правило вытекает из тех преобразований, которые необходимо для этого проделать - они известны и всегда выполнимы:

- исключить связки эквивалентности и импликации;
- переименовать (если необходимо) связанные переменные таким образом, чтобы каждый квантор имел свою переменную;
- удалить те квантификаторы, область действия которых не содержит квантифицированной переменной, как ненужные;
- ограничить область действия отрицания;
- провести сколемизацию;
- переместить все кванторы общности в начало формулы, образовав префикс и матрицу.

К моменту последней операции перемещения кванторов связанные переменные уже разделены, каждый квантор общности имеет свою переменную, независимые переменные заменены постоянными (конкретизация). Будучи перемещенным в начало формулы, он и все равно распространяют влияние лишь на "свои" переменные. Широко используются приведенные ранее равносильности (6.1) - (6.7). Может пригодиться еще и правило раскрытия импликации:

$$\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) = \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x). \qquad (6.8)$$

8. Исключение кванторов общности

Получение предваренной формы - важный этап в деле преобразования исходной формулы ИП. Дальнейшая работа будет проводиться с матрицей, все переменные которой относятся к тому или иному квантору общности. Роль цепочки кванторов (префикса) в данном случае - в простом напоминании об этом факте. К тому же порядок кванторов общности роли не играет. Если все это принять во внимание, то префикс вообще можно убрать и предположить по соглашению, что все переменные относятся к своим кванторам общности. Остается одна матрица.

69. Приведение матрицы к КНФ

Если теперь рассматривать матрицу как логическое выражение, связывающее посредством пропозициональных связок некоторое количество литералов, то процесс приведения любой матрицы к конъюнктивной нормальной форме будет мало чем отличаться от такого же процесса в рамках исчисления высказываний. Процесс этот всегда возможен, и конечный итог известен: матрица будет представлена в виде конъюнкции дизъюнктов (каузальная форма). Дизъюнкт, напомним, в исчислении предикатов называется предложением. Знаки конъюнкции можно опустить, и все множество полученных предложений представить в виде столбца, рассматривая каждое из них как некую исходную гипотезу (как это мы делали с дизъюнктами в процессе логического вывода в ИВ).

10. Обобщающий пример

Привести заданное выражение к системе предложений.

$$\forall x\{ \forall y[P(x,y) \rightarrow \exists x Q(x, h(y))] \rightarrow \forall x \exists y R(a,y,x)\}.$$

Освобождаемся от импликаций.

$$\forall x\{ \overline{\forall y[\overline{P}(x,y) \vee \exists x Q(x,h(y))]} \vee \forall x \exists y R(a,y,x)\}.$$

Переносим и снимаем отрицания (согласно (6.6) и др. правилам).

$$\forall x\{ \exists y \overline{[\overline{P}(x,y) \vee \exists x Q(x,h(y))]} \vee \forall x \exists y R(a,y,x)\}$$

$$\forall x\{ \exists y [\overline{\overline{P}}(x,y) \wedge \overline{\exists x Q(x,h(y))}] \vee \forall x \exists y R(a,y,x)\}.$$

Окончательно:

$$\forall x\{ \exists y [P(x,y) \wedge \exists x \overline{Q}(x,h(y))] \vee \forall x \exists y R(a,y,x)\}.$$

Проводим стандартизацию: каждый квантор должен иметь свою переменную. С этой целью переименуем в средней формуле (для $\overline{Q}$) x на u, в последней формуле - x на z, y на w:

$$\forall x\{ \exists y \lfloor P(x,y) \wedge \forall u \overline{Q}(u,h(y)) \rfloor \vee \forall z \exists w R(a,w,z)\}.$$

Исключаем кванторы существования. Заметим, что квантор $\exists y$ находится в сфере действия $\forall x$ и распространяется на квадратные скобки, а квантор $\exists w$ - в сфере действия $\forall x$ и $\forall z$, соответственно вводим функции Сколема.

$$\forall x\{\,[P(x,f(x)) \wedge \forall u \bar{Q}(u,h(f(x)))] \vee \forall z R(a,g(x,z),z)\,\}.$$

Выносим кванторы общности влево, за скобки, образуем предваренную форму.

$$\forall x\, \forall u\, \forall z\, \{\,[P(x,f(x)) \wedge \bar{Q}(u,h(f(x)))] \vee R(a,g(x,z),z)\,\}.$$

Опускаем кванторы общности, полученную матрицу приводим к КНФ.

$$[P(x,f(x)) \wedge \bar{Q}(u,h(f(x)))] \vee R(a,g(x,z),z) =$$

(раскрывая конъюнкцию по дизъюнкции)

$$= (P(x,f(x)) \vee R(a,g(x,z),z)) \wedge (\bar{Q}(u,h(f(x))) \vee R(a,g(x,z),z))$$

Окончательно получаем систему предложений:

$$1.\ P(x,f(x)) \vee R(a,g(x,z),z)),$$
$$2.\ \bar{Q}(u,h(f(x))) \vee R(a,g(x,z),z)).$$

Хорошо, что мы научились приводить выражение в предваренной форме к системе предложений. Но для того, чтобы идти дальше и проводить с ними процесс резолюции, нам необходимо уметь находить контрарные литералы, что при участии многоместных предикатов с различными переменными становится делом весьма непростым. Пусть, например, имеются предложения:

$$1.\ Q(u) \vee P(A),$$
$$2.\ \bar{Q}(w) \vee P(w),$$
$$3.\ \bar{Q}(x) \vee \bar{P}(x)$$
$$4.\ Q(y) \vee \bar{P}(y).$$

Судя по предикатным символам, здесь вполне возможна резолюция. Но различные переменные не дают нам делать это непосредственно. Необходимо делать *подстановки*.

11. Подстановки и унификация

Пусть имеется формула $P(x,y,z)$. Ввести подстановку s это значит определить множество пар типа $s = \{t_1/x,\ t_2/y,\ t_3/z\}$,позволяющих заменить x на t_1, y на t_2, z на t_3 во всех местах их вхождений. Полученная формула равносильна прежней: $P(x,y,z) = P(t_1, t_2, t_3)$.

Подстановки открывают широкие возможности при преобразовании формул. Простейший пример:

дана формула $P(x,f(y),z) \wedge P(a,b,r)$.

Введем подстановку $s_1 = \{a/x, b/f(y), r/z\}$ для первого предиката и получим: $P(a,b,r) \wedge P(a,b,r) = P(a,b,r)$, т.е. произошла "склейка" - распространенный прием в процессах вывода.

Проводя подстановки, надо следовать следующим правилам:

- подстановки применяются только для свободных переменных, в том числе и для функциональных, во всех местах их вхождений в данную формулу (предложение);
- переменную можно заменить константой, но нельзя константу заменить переменной;
- переменная не может быть заменена на терм, содержащий ту же самую переменную;
- подстановки могут касаться только некоторых термов предиката, остальные термы остаются без изменения;
- одна функция не может подставляться вместо другой, но может заменять переменную-аргумент;
- нельзя вместо свободной переменной ввести уже связанную, другими словами, вводимое подстановкой вхождение переменной не должно попадать в область действия квантора, связывающего данную переменную.

К последнему правилу приведем простой пример. Формула $\exists y(x<y)$ отображает вполне корректное математическое условие (для любого x всегда найдется y, что $x < y$). Некорректная подстановка y/x приводит к ложному суждению: $\exists y\ (y < y)$.

Если к формуле E применена подстановка s_1, то пишут Es_1. Так, если к предикату $P(x,f(y),B)$ применена подстановка $s_1 = \{z/x, w/y\}$, то можно написать $P(x,f(y),B)s_1 = P(z,f(w),B)$.

Если к полученной формуле применить еще подстановку $s_2=\{C/z, D/f(w)\}$, то получится $P(x,f(y),B)s_1s_2 = P(C,D,B)$.

Если все термы предиката не содержат переменных, то мы имеем *"основной частный случай" ("основной пример")*.

Последовательное применение подстановок называется их композицией.

Некоторая подстановка s называется *унифицированной* (унификатором), если ее применение к ряду формул $E_1, E_2, ...$ делает их равными: $E_1s = E_2s = E_3s$ ... Например, подстановка $s = \{A/x, B/y\}$ унифицирует формулы $P(x,f(y),B)$ и $P(x,f(B),B)$ и дает $P(A,f(B),B)$.

Примечание. Обратите внимание, что предикатные символы при этом должны быть одинаковыми.

Освоить технику унификации совершенно необходимо. В процессе резолюции, например, контрарные литералы должны быть идентичны, что как раз и достигается их унификацией. Разберем поэтому несколько показательных примеров.

Пример 1. Унифицировать множество литералов:

$$\{P(a,x),\ P(y,f(b))\}.$$

Поиск возможных подстановок начинаем с установления различий в термах обоих литералов, начиная с левых позиций. Первое рассогласование: (a,y). Так как переменной здесь является y, то вводим подстановку $s_1 = (a/y)$. Получаем пару литералов

$$\{P(a,x),\ P(a,f(b))\}.$$

Очередное рассогласование: $(x,f(b))$. Теперь уже вводим подстановку $s_2 = (f(b)/x)$: $\{P(a,f(b)),\ P(a,f(b))\}$. Унификация состоялась. Общая подстановка имеет вид $su = s_1s_2 = (a/y,\ f(b)/x)$.

Подстановка su, определенная таким образом, называется ***наиболее общим унификатором - ноу***.

Пример 2. Определить *ноу* для пары литералов

$$P(x,f(x),z) \text{ и } P(A,u,u).$$

Начинаем с левых позиций. Рассогласование: (x,A), подстановка $s_1 = (A/x)$, литералы: $P(A,f(A),z)$ и $P(A,u,u)$. Рассогласование: $(f(A),u)$, $s_2 = (f(A)/u)$, литералы: $P(A,f(A),z)$ и $P(A,f(A),f(A))$. Рассогласование: $(z,f(A))$, $s_3 = (f(A)/z)$.

Окончательно:

$$P(A,f(A),f(A)) \text{ и } P(A,f(A),f(A)).$$

Наиболее общий унификатор $su = s_1s_2s_3 = (A/x, f(A)/u, f(A)/z)$.

12. Вывод в исчислении предикатов

Так же, как и в исчислении высказываний, проблема вывода в ИП сводится к проблеме дедукции, т.е. к решению вопроса: является ли формула *B* логическим следствием множества формул $\{E\}$. Напомним, что ппф *B* является логическим следствием множества $\{E\}$, если она принимает значение *И* всякий раз, как только все *Ei* одновременно принимают значение *И*. Вопрос решался через доказательство теоремы дедукции, которая справедлива и в ИП, с учетом, впрочем, ряда оговорок и условий, касающихся действий со связными и свободными переменными. Так же, как и в ИВ, встает проблема определения общезначимости той или иной формулы. И решается она примерно так же, т.е. как минимум пятью способами, каждый из которых применим в ИП:

1) оценка с помощью таблицы истинности,

2) оценка через преобразование, упрощение и приведение к нормальным формам,

3) оценка путем логического вывода из системы аксиом,

4) оценка методом редукции,

5) оценка методом опровержения.

Однако самым эффективным средством порождения и/или доказательства следствий здесь по-прежнему является метод резолюций.

В ИП резолюция применяется к предложениям, представляющим из себя дизъюнкцию литералов, каждый из которых, в общем случае, содержит различные переменные. Очевидно, что родительские предложения должны содержать контрарные литералы, идентичные по форме. Идентичность литералов достигается при этом применением соответствующих подстановок и унификации.

Пусть, например, у нас имеется два родительских предложения *L* и *M*, содержащие соответственно литералы *l* и $\overline{m}$, которые допускают общую подстановку-унификатор *s* такую, что *(l)s = (m)s* (без учета инверсии). Теперь возможна резолюция, которая "уничтожит" оба этих литерала, но при этом надо помнить, что подстановка возможна только для предложения в целом. Поэтому результат резолюции можно записать в виде нового предложения, объединяющего (*U*) оставшиеся литералы:

$$(L - l)\, s \cup (M - m)\, s. \qquad (6.9)$$

Родительских предложений может быть несколько, также как и пар контрарных литералов. Резольвенту (6.9) перепишем теперь в общем виде:

$$(L - \{l_i\})\, s \cup (M - \{m_i\})\, s. \qquad (6.10)$$

Рассмотрим следующий пример. Имеется два предложения:

$$L{:}\ P\,[x,f(A)] \vee P\,[x,f(y)] \vee Q(y),$$

$$M{:}\ \overline{P}\,[z,f(A)] \vee \overline{Q}\,(z).$$

Для резолюции выбираем литералы: $l=P\,[x,f(A)]$ *и* $m=\overline{P}\,[z,f(A)]$.

Подстановка *s = z/x* для них является унификатором (применяя ее к *l*). Но при этом все предложение *L* примет вид:

$$La\colon P[z,f(A)] \vee P[z,f(y)] \vee Q(y).$$

Результат резолюции La и M согласно (6.9):

$$P[z,f(y)] \vee Q(y) \vee \overline{Q}(z).$$

Совершенно иной результат получится, если выбрать множество $\{l_i\} = (P[x,f(A)], P[x,f(y)])$, а $m = \neg P[z,f(A)]$.

Введем унификатор $s = (z/x,\ A/y)$. Исходные предложения принимают вид:

$$Lb\colon P[z,f(A)] \vee P[z,f(A)] \vee Q(A),$$
$$M\colon \overline{P}[z,f(A)] \vee \overline{Q}(z).$$

Два первых литерала предложения Lb склеиваются в один, и в результате получится резольвента $Q(A) \vee \overline{Q}(z)$.

Здесь возможны и другие резолюции, в частности, по Q.

Примечание. Термы в многоместном предикате не могут меняться местами, поэтому литералы $P(x,f(y))$ и $P(f(y),x)$ не идентичны. Это следует учитывать в процессе резолюции.

Так же, как и в исчислении высказываний, метод резолюций - основной инструмент доказательства логического следствия по методу опровержения. Принцип дедукции, который при этом реализуется, все тот же: если ппф B является логическим следствием системы $\{E\}$, то справедливо $\{E, \overline{B}\} \mapsto Л$, т.е. множество $\{E, \overline{B}\}$ имеет своим следствием пустой дизъюнкт. Надо только помнить, что все формулы здесь - ппф в смысле исчисления предикатов со всеми вытекающими отсюда действиями и ограничениями.

Пусть заданы две гипотезы:

1. $\forall x[P(x) \vee \exists x Q(x) \vee R(x)]$,
2. $\neg\forall y Q(y)$.

Требуется доказать, что выражение

3. $\neg\exists z P(z) \to \forall z R(z)$

является логическим следствием этих двух. Следуя принципу дедукции, находим отрицание выражения 3:

$$\overline{(\overline{\overline{\exists}} z P(z) \to \forall z R(z))}.$$

Исключая импликацию и приводя в порядок отрицания, получаем:

$$\overline{(\overline{\overline{\exists}} z P(z) \vee \forall z R(z))} = \overline{(\exists z P(z) \vee \forall z R(z))} =$$
$$\overline{\exists} z P(z) \wedge \overline{\forall} z R(z) = \forall z \overline{P(z)} \wedge \exists z \overline{R(z)}$$

(после переименования и сколемизации – к предваренной форме),

$$\forall z\overline{P(z)} \wedge \exists u\overline{R(u)} = \forall z\overline{P(z)} \wedge \overline{R(b)}.$$

Или окончательно:

4. $\forall z\left(\overline{P(z)} \wedge \overline{R(b)}\right)$.

Гипотеза 1 преобразуется просто (вводится функция Сколема):

5. $\forall x[P(x) \vee \exists wQ(w) \vee R(x)] = \forall x[P(x) \vee Q(g(x)) \vee R(x)]$,

а для гипотезы 2 используем равенство:

6. $\overline{\forall} yQ(y) = \exists y\overline{Q(y)} = \overline{Q(a)}$.

Кванторы общности в предваренных формах выражений 4 и 5 теперь можно опустить. Мы приходим к системе предложений

а) $P(x) \vee Q(g(x)) \vee R(x)$,
б) $\overline{Q}(a)$,
в) $\overline{P}(z)$,
г) $\overline{R}(b)$.

(Знак $\wedge$ в матрице выражения 4 опускается, и она распадается на два предложения в) и г)).

Теперь можно проводить резолюции. У каждой резольвенты будем указывать унификатор, позволяющий ее получить.

д) $Q(g(z)) \vee R(z)$, $s = z/x$ (а, в)
$Q(g(B))$, $s = B/z$ (г, д),
ж) ***Л***, $s = A/g(B)$ (б, е).

Логическое следствие доказано.

13. Примеры применения метода резолюций

<u>*Пример 1*</u>. Ранее нами был рассмотрен силлогизм о Сократе и получена соответствующая предикатная формула:

$$\forall x((H(x) \to M(x)) \wedge H(\textit{Сократ})) \to M(\textit{Сократ}).$$

(Здесь H - быть человеком, M - быть смертным). Требуется доказать, что эта формула общезначима. Докажем это методом опровержения: формула общезначима, если ее отрицание невыполнимо. Берем отрицание исходной формулы (Сократ обозначим C).

$$\overline{(\forall x((H(x) \to M(x)) \wedge H(C)) \to M(C))}.$$

Исключаем импликации, работаем с отрицаниями.

$$\overline{(\overline{\forall} x((\overline{H}(x) \vee M(x)) \wedge H(C)) \vee M(C))},$$

$$\overline{(\exists x\overline{((\overline{\overline{H}}(x) \vee M(x)) \wedge H(C))} \vee M(C))},$$

$$\overline{(\exists x(\overline{(\overline{\overline{H}}(x) \vee M(x))} \vee \overline{H(C)}) \vee M(C))},$$

$$\overline{(\exists x((H(x) \wedge \overline{M}(x)) \vee \overline{H(C)}) \vee M(C))},$$

$$\forall x(\overline{((H(x) \wedge \overline{M(x)}) \vee \overline{H(C)})} \wedge \overline{M(C)},$$

$$\forall x(\overline{(H(x) \wedge \overline{M(x)})} \wedge H(C)) \wedge \overline{M(C)},$$

$$\forall x((\overline{H(x)} \vee M(x)) \wedge H(C)) \wedge \overline{M(C)}.$$

Мы получили предваренную форму в конъюнкции с $\overline{M(C)}$.

Опуская квантор общности и ненужные скобки, получаем выражение, уже представленное в КНФ:

$$(\overline{H}(x) \vee M(x)) \wedge H(C) \wedge \overline{M}(C).$$

Таким образом, получается следующая система предложений

1. $\overline{H}(x) \vee M(x)$,
2. $H(C)$,
3. $\neg M(C)$.

Применяя подстановку $s=C/x$, проводим резолюцию.

4. $M(C)$, (1,2)
5. $Л$. (3,4)

Общезначимость исходного силлогизма доказана.

Пример 2. Посылка: каждый предприниматель, который занимается бизнесом, получает прибыль. Заключение: если прибыли нет, никто заниматься бизнесом не будет. Введем обозначение предикатных констант: $S(x,y)$ - *x ЗАНИМАЕТСЯ ДЕЛОМ y*; *B* - *БИЗНЕС*; *P* - *ПРИБЫЛЬ*; $R(x,y)$ - *x ПОЛУЧАЕТ y*. Посылка запишется в следующем виде

$$\forall x(\exists y(S(x,y) \wedge B(y)) \to \exists y(P(y) \wedge R(x,y)))$$

(если у каждого предпринимателя *x* есть дело *y* *И* это дело - бизнес *B*, то это дело приносит прибыль *P*, *И* он ее получает (*R*)), а заключение - в виде

$$\overline{\exists} x P(x) \to \forall x \forall y(S(x,y) \to \overline{B}(y))$$

(если никто не получает прибыль, то каким бы делом он ни занимался, это будет не бизнес).

Представим посылку в виде системы предложений. Исключаем импликацию и делаем преобразования.

$$\forall x(\overline{\exists} y(S(x,y) \wedge B(y)) \vee \exists y(P(y) \wedge R(x,y))),$$

$$\forall x(\forall y(\overline{S(x,y) \wedge B(y)}) \vee \exists y(P(y) \wedge R(x,y))),$$

$$\forall x(\forall y(\overline{S}(x,y) \vee \overline{B}(y)) \vee \exists y(P(y) \wedge R(x,y))).$$

После сколемизации – к предваренной форме:

$$\forall x(\forall y(\overline{S}(x,y) \vee \overline{B}(y)) \vee \exists w(P(w) \wedge R(x,w))),$$

$$\forall x\left(\forall y\left(\overline{S}(x,y)\vee\overline{B}(y)\right)\vee\left(P(f(x))\wedge R(x,f(x))\right)\right)$$

(заметим, что квантор $\exists w$ (после переименования) зависит только от $\forall x$). Матрицу приводим к КНФ.

$$(\overline{S}\,(x,y)\vee\overline{B}(y))\vee(P(f(x))\wedge R(x,f(x))$$

и, раскрывая конъюнкцию, окончательно получаем предложения посылки

1. $\overline{S}\,(x,y)\vee\overline{B}(y)\vee P(f(x))$,
2. $\overline{S}\,(x,y)\vee\overline{B}\,(y)\vee R(x,f(x))$.

Теперь займемся заключением. Надо найти его отрицание.

$$\overline{(\exists xP(x)\rightarrow\forall x\forall y(S(x,y)\rightarrow\overline{B}(y)))},$$

$$\overline{(\overline{\overline{\exists}}xP(x)\vee\forall x\forall y(\overline{S}(x,y)\vee\overline{B}(y)))},$$

$$\overline{(\exists xP(x)\vee\forall x\forall y(\overline{S}(x,y)\vee\overline{B}(y)))},$$

$$\overline{\exists}xP(x)\wedge\overline{\forall}x\forall y(\overline{S}(x,y)\vee\overline{B}(y)),$$

$$\forall x\overline{P}(x)\wedge\exists x\exists y\overline{(\overline{S}(x,y)\vee\overline{B}(y))},$$

$$\forall z\overline{P}(z)\wedge\exists x\exists y(S(x,y)\wedge B(y)),$$

(переименование и сколемизация)

$$\forall z\overline{P}(z)\wedge(S(a,b)\wedge B(b)).$$

Матрица: $\overline{P}(z)\wedge S(a,b)\wedge B(b)$.

Предложения от заключения:

3. $\overline{P}(z)$,
4. $S(a,b)$,
5. $B(b)$.

Резолюции для всех предложений 1-5:

6. $\overline{S}\,(x,y)\vee\overline{B}\,(y)$ (1,3) ($s=f(x)/z$),
7. $B(b)$ (4.6) ($s=a/x$, b/y),
8. *Л* (5,7).

Наконец, рассмотрим еще один пример, который пригодится нам в дальнейшем.

<u>*Пример*</u> 3. Имеются следующие утверждения:

Кто работает с интегралами, тот математик

$$1.\ \forall x[\,И(x)\rightarrow М(x)\,].$$

Дети не математики

$$2.\ \forall x[\,Д(x)\rightarrow\overline{М}(x)\,].$$

Некоторые дети обладают математическими способностями.

$$3.\ \exists x\,[\,Д\,(x) \wedge C\,(x)\,].$$

Требуется доказать следующее заключение: некоторые из тех, кто имеет способности к математике, не работают с интегралами:

$$4.\ \exists x[C(x) \wedge \overline{И}(x)].$$

Первое и второе утверждения приводятся к предложениям

$$1'.\ И(x) \vee M(x),$$

$$2'\ Д(x) \vee \overline{M}(x).$$

В третьем проведем сколемизацию, оно распадается на два однолитерных предложения:

$$3'.\ Д(a);$$

$$4'.\ C(a).$$

От четвертого надо взять отрицание.

$$\overline{\exists} x[C(x) \wedge \overline{И}(x)],$$

$$\forall x\overline{[C(x) \wedge \overline{И}(x)]},$$

$$\forall x[\overline{C}(x) \vee \overline{\overline{И}}(x)].$$

Получаем последнее предложение

$$5.\ \overline{C}(x) \vee И(x).$$

С предложениями 1'- 4' и 5 проводим резолюцию (соответствующие подстановки подразумеваются).

6. $И\,(a)$	(4',5),
7. $M\,(a)$	(6,1'),
8. $\overline{Д}\,(a)$	(7,2'),
9. $Л$	(8,3').

14. Стратегии резолюции

Речь идет о применении метода резолюций при реализации опровержения. Если резолюции нужны нам только лишь для порождения возможно большего количества следствий, то это вопрос не слишком острый. Ибо именно порождение большого количества резольвент, является свойством и особенностью применения резолюций. Но тут возникает вопрос о выборе эффективной стратегии поиска результата, вопрос, пока еще не нашедший однозначного решения.

<u>Метод полного перебора</u> - самый простой по идее и по алгоритму. Еще он называется методом поиска в ширину. Знакомое название. А удивляться нечему: множество резольвент – это ведь математическая модель, отображающая множество состояний предметной области. Поиск в пространстве состояний, в определенном смысле, аналогичен поиску решения на множестве резольвент.

Начинается он с поиска резольвент между предложениями базового множества. (Базовым будем называть множество предложений посылок вкупе с предложениями, полученными при отрицании заключения). Это будут резольвенты первого уровня. По мере их вычисления они подсоединяются к концу списка предложений. Далее вычисляются резольвенты 2-го уровня как результаты резолюций базового множества дизъюнктов и дизъюнктов 1-го уровня или их потомков . И т.д. Метод можно проследить на простом примере. Пусть S заданное множество (4 дизъюнкта).

S:	Резольвенты:			
	1-й уровень		2-й уровень	
1. $P \vee Q$	5. Q	(1,2)	13.	(1,7)
2. $P \vee Q$	6. P	(1,3)	14.	(1,8)
3. $P \vee Q$	7. $Q \vee Q$	(1,4)	15.	(1,9)
4. $P \vee Q$	8. $P \vee P$	(1,4)	16.	(1,10)
	9. $Q \vee Q$	(2,3)	17.	(1,11)
	10.	(2,3)	18.	(1,12)
	11.	(2,4)	......	
	12.	(3,4)	и т.д.	

Этот бесхитростный перебор не сулит быстрого успеха, но зато гарантирует нахождение пустого дизъюнкта (если он, конечно, имеется). Такая стратегия называется *полной*. По указанной стратегии дизъюнкт ***Л*** будет 39-м!

Из примера следуют важные выводы. Так, оказалось, что было порождено много ненужных и потому лишних дизъюнктов. Многие из них повторяются: 5 и 17, 6 и 18, 13-16. Некоторые являются тавтологиями: 7-10. При поиске по методу опровержения мы ищем невыполнимый дизъюнкт и эту невыполнимость нам нельзя потерять. Тавтологии же всегда выполнимы, к делу не относятся и могут быть вычеркнуты, иначе они сами начнут порождать лишние резольвенты. Если из списка порождаемых дизъюнктов исключать повторяющиеся, а также тавтологии, то число резольвент значительно уменьшится и метод полного перебора окажется не таким уж громоздким. Его можно еще более оптимизировать, если применить так называемый *принцип подсуммирования (поглощения)*.

Пусть у нас имеются два дизъюнкта C и D, такие, что $C = A$, $D = A \vee B$. C, как видим, является составной частью D. Говорят, что C *подсуммирует* D. Если теперь окажется, что D невыполним (=*Л*), то по свойству дизъюнкции $C = A =$ *Л*. Замена D на C *сохраняет невыполнимость*, и D можно просто отбросить: C *поглощает* D.

Примеры подсуммирования:

<u>C:</u>		<u>D:</u>
$A \vee R$	подсуммирует	$A \vee B \vee R$,
$P(x)$	подсуммирует	$P(y) \vee Q(z)$,
$P(x) \vee Q(E)$	подсуммирует	$P(f(A)) \vee Q(B) \vee R(z)$,
$P(x) \vee Q(f(x),a)$	подсуммирует	$P(q(y)) \vee Q(f(q(y)),a) \vee R(z)$.

Обратите внимание, что подсуммирование возможно после введения соответствующих подстановок. Только после этого допустимо поглощение и правые дизъюнкты отбрасываются в пользу левых.

Вычеркивая ненужные дизъюнкты и применяя подсуммирование, мы в определенном смысле видоизменяем сам метод полного перебора. Мы применяем теперь <u>*стратегию упрощения*</u>. Обладая полнотой исходного метода, такая стратегия существенно сокращает список резольвент. Алгоритм перебора остается прежним, но каждая возникающая резольвента анализируется и при необходимости отбрасывается. Так, рассмотренный выше пример разрешится следующим образом:

Резолюции: 5. Q (1,2), 8. $\bar{Q}$ (3,4),

6. Р (1,3), 9. *Л* (5,8) – начало второго
7. ¬*Р* (2,4), уровня.

<u>*Дерево опровержения*</u>. Выбранную стратегию опровержения удобно отображать в виде графа с корневой вершиной с пометкой *Л*. Такой граф не только обладает наглядностью, но и предостерегает от ошибочных или просто повторных шагов. Выше мы рассматривали пример с математиками (пп.6.13). Построим соответствующее ему дерево опровержения. Для каждого базового предложения отведем свою вершину. Если две вершины образуют родительскую пару, то ребра, исходящие их них, будут сходиться к вершине, помеченной их резольвентой-потомком.

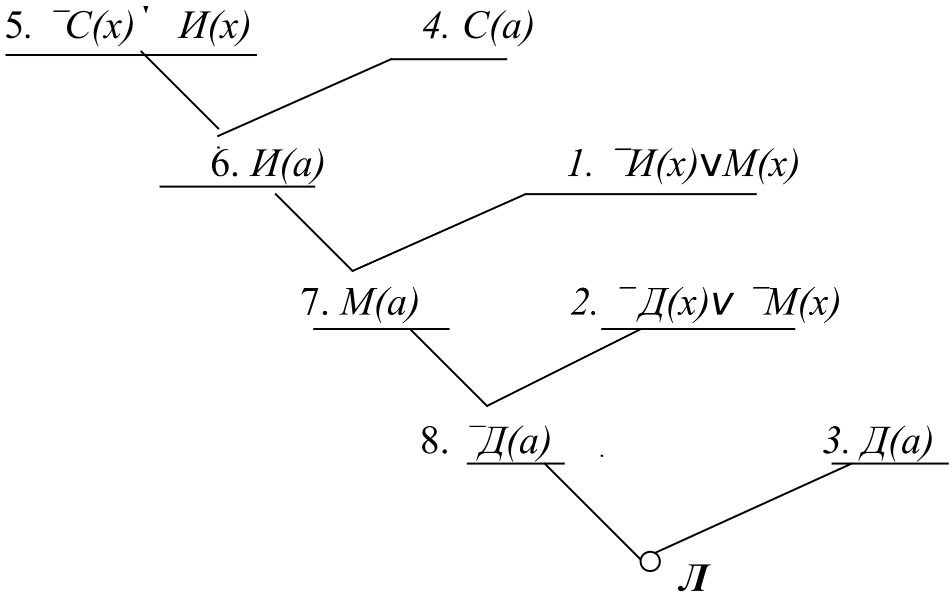

Рис. 6.1. Дерево опровержения

Приведенный пример удобен тем, что он иллюстрирует сразу несколько стратегий.

<u>*Стратегия опорного множества.*</u> Согласно этой стратегии процесс опровержения строится так, что по крайней мере один из родителей в каждой резольвенте выбирается из предложений,

полученных при отрицании заключения (целевая ппф) или их потомков (опорное множество). Эта стратегия обладает полнотой, т.е. можно показать, что если опровержение существует, оно может быть найдено по алгоритму стратегии опорного множества. Его применение приводит к более медленному росту числа резольвент, особенно в ширину, при большей интенсивности проникновения в глубину (увеличивая количество уровней). Такое движение как раз способствует поиску пустого дизъюнкта. Дерево опровержения на рис.6.1 могло бы быть порождено стратегией опорного множества.

Стратегия предпочтения одночленам. Можно сказать, что эта стратегия есть модификация предыдущей. Стратегия эта заключается в том, что на каждом шаге резолюции мы пытаемся в качестве одной из родительских вершин выбирать однолитерное предложение. В такой стратегии заключается определенный смысл: когда в резолюции используется одночлен, резольвента содержит меньшее по сравнению с другим родителем число литералов. Процесс целенаправленно движется в сторону увеличения однолитерных резольвент, что способствует получению пустого дизъюнкта. Рис. 6.1. может служить примером указанной стратегии.

Стратегия, линейная по входу. Особенность линейной стратегии в том, что в каждой резолюции одно из родительских предложений принадлежит базовому множеству. Такое начало нам уже знакомо по стратегии полного перебора. Но там, повинуясь другой идее, алгоритм постепенно уходит в сторону. Если же следовать стратегии, линейной по входу, то можно было бы заметить, что она приводит к заметному снижению порождаемых дизъюнктов. Отметим, что граф опровержения на рис.6.1 соответствует стратегии, линейной по входу. (Обратите внимание, что в данном случае на каждом шаге резолюции здесь участвует резольвента, полученная на предыдущем шаге. Такое дерево называется дерево-лоза). Заметим, однако, что известны случаи, когда эта стратегия не приводила к желаемому результату, хотя опровержение заведомо существовало. Это означает, что стратегия, линейная по входу, не является полной, что следует учитывать при ее использовании. Так, мы сейчас рассмотрим простой пример, когда строгое следование лозе не приводит к желаемому и такому близкому результату, но небольшое изменение в алгоритме дает прекрасный результат.

<u>Пример</u>. Имеется система предложений:

$$R(x) \vee \neg P(x),$$
$$\neg R(y) \vee \neg P(y),$$
$$\overline{R}(z) \vee P(z),$$
$$R(h) \vee P(A).$$

Соответствующее дерево-лоза приводится на рис.6.2. Необходимые подстановки здесь очевидны.

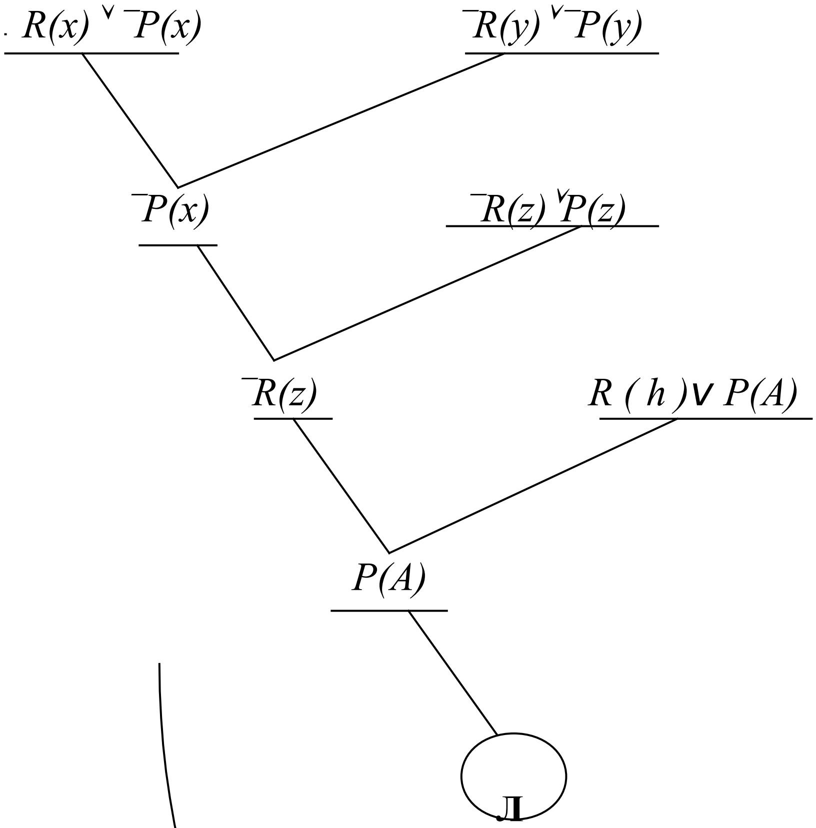

Рис 6.2. Опровержение, линейное по входу,

с коррекцией алгоритма

Среди базовых предложений не нашлось однолитерного для образования пустого дизъюнкта. Резолюция с одним из потомков спасла положение.

15. Пример решения задачи средствами ИП

Берем всё тот же пример с обезьяной и бананами. Считаем, что модель предметной области уже построена. Следует отобразить ее в терминах ИП. Алфавит *А* ИП, как известно, кроме символов ¬, $^\wedge$, $^\vee$, →, ~, ∀, ∃, содержит также:

индивидные константы,
предметные переменные,
функциональные константы,
высказывания,
предикатные константы.

Очевидно, что роль индивидных констант здесь будут играть элементы множества *X* Мпо, т.е. множество имен объектов. У нас это: Обезьяна (О), Ящик (Я), Бананы (Б). Роль предметных переменных – элементы множества *С* (множество имен свойств объектов). В нашем примере это координаты Обезьяны, Ящика и Бананов – соответственно *x, y, c*. Область определения для них – множество *D* точек комнаты. В качестве функциональных переменных, как правило, выступают операторы (действия). В нашем случае – множество $G = \{g_1$ – подойти, g_2 – перенести, g_3 – взобраться, g_4 – схватить$\}$. Областью определения функций является множество состояний предметной области, которое возникает в результате выполнения этих действий. Это состояния, являющиеся предусловиями и постусловиями применения действий. Обозначим это множество состояний через $S = \{s_1, s_2, \dots s_n\}$.

Множество *R* – множество имен отношений. Например:

НА(О,Я) – Обезьяна НА Ящике;

У(О,Я) – Обезьяна У Ящика;

¯*В(О,Б)* – Бананы НЕ-В руках Обезьяны;

и т.п. – готовая предикатная форма записи.

Координаты объектов введем через одноместные предикаты.

О(x) – Обезьяна находится в т. *x*;

$Я(y)$ – Ящик находится в т. y;

$Б(c)$ – Бананы висят в т. c. Здесь $(x,y,c \in D)$.

Трехместный предикат делает семантику более гибкой:

$В(О, Я, x)$ – Обезьяна и Ящик находятся в т. x.

$У(О,Б,c)$ – Бананы у Обезьяны в т. c.

Из сказанного видно, что роль термов у нас играют индивидные константы (О,Я,Б) и предметные переменные (x,y,c). Но этого недостаточно, т.к. они описывают лишь отдельные состояния предметной области. Переход из одного состояние в другое осуществляется под действием операторов g_i, прилагаемых в данной точке x к конкретному состоянию s: $g_i(x,s)$. Это тоже терм. Следовательно, допустимы такие выражения (для $x,y,c \in D; s \in S$):

$В(О, Я, y, g_1(x,s))$ – "Обезьяна и Ящик находятся в т. y в результате применения оператора *подойти к Ящику* к состоянию s в т. x";

$НА(О, Я, y, g_2(y,s))$ – "Обезьяна сидит на Ящике в т. y в результате применения оператора *взобраться на Ящик* к состоянию s".

Используя таким образом язык исчисления предикатов, запишем нашу модель предметной области в виде следующих аксиом.

1. $\forall x\, \forall s[(\overline{РЯДОМ}(О,Я,x,s)) \rightarrow В(О,Я,y,g_1(x,s))]$ –

"для всех x и s: если в состоянии s Обезьяна и Ящик **не** находятся рядом в т. x, то Обезьяна может оказаться в т. y, где находится Ящик, путем применения к ситуации s оператора g_1 (*подойти к Ящику*) из точки x в точку y".

2. $\forall y\, \forall s[(В(О,Я,c,g_2(y,s)) \rightarrow НА(О,Я,c,g_3(c,s))]$ –

"для всех y и s: если Обезьяна и Ящик под действием оператора g_2 (*перенести Ящик*) оказались в точке c, то Обезьяна обязательно заберется на Ящик под действием g_3 (*взобраться на Ящик*)".

3. $(\neg У(О,Б,c,S_н)) \rightarrow \overline{НА}(О,Я,c,S_н)$ –

"если в точке c у Обезьяны нет Бананов, то она НЕ-НА Ящике".

4. $\overline{РЯДОМ}\ (О,Я,b,S_н)$ –

" в начальном состоянии Обезьяна и Ящик не находятся рядом".

5. $\forall y\, \forall s(В(О,Я,c,g_2(y,s))$ –

"для всех y и s: Обезьяна и Ящик находятся в точке c в результате применения оператора g_2 (*перенести Ящик*)" к состоянию s.

(В выражениях 3–4 кванторы $\forall$ отсутствуют, т.к. это конкретные высказывания, характеризующие начальное состояние $S_н$).

Поставим теперь вопрос: существует ли такое состояние $s \in S$ в некоторой точке $x \in D$, при котором Бананы находятся у Обезьяны? Формально вопрос запишется так:

6. $\exists s(\text{У}(\text{О},\text{Б},x,s))$,

т.е. мы как бы говорим: "Да, существует такое состояние *s*". Требуется, таким образом, доказать, что это утверждение истинно. С точки зрения формальной логики это случится, если выражение 6 окажется логическим следствием пяти предыдущих посылок:

(1. 2. 3. 4. 5)□6 .

Как и прежде, будем использовать метод опровержения и, как следствие, *метод резолюций*. Для начала приведем выражения, имеющие кванторы, к *предваренной* нормальной форме, затем возьмем отрицание от формулы 6. В последнем случае получим цепочку преобразований:

$$\overline{\exists s}(\text{У}(\text{О},\text{Б},x,s)) = \forall s(\neg\text{У}(\text{О},\text{Б},x,s) = \neg\text{У}(\text{О},\text{Б},x,s).$$

Добавим полученное выражение к пяти вышеприведенным формулам, представленным в предваренной форме. Получим следующую систему предложений:

1'. $\text{РЯДОМ}(\text{О},\text{Я},x,s) \vee \text{В}(\text{О},\text{Я},y,g_1(x,s))$;

2'. $\neg\text{В}(\text{О},\text{Я},c,g_2(y,s)) \vee \text{НА}(\text{О},\text{Я},c,g_3(c,s))$;

3'. $\text{У}(\text{О},\text{Б},c,S\text{н}) \vee \overline{\text{НА}}(\text{О},\text{Я},c,S\text{н})$;

4'. $\overline{\text{РЯДОМ}}(\text{О},\text{Я},b,S\text{н})$;

5'. $\text{В}(\text{О},\text{Я},c,g_2(y,s))$;

6'. $\text{У}(\text{О},\text{Б},x,s)$.

Система из пяти предложений 1'–5' непротиворечива по построению (можно проверить). Если теперь путем подстановок и резолюций мы определим пустой дизъюнкт в расширенной системе 1' – 6', то это будет означать, что добавление 6' приводит ее к противоречию. Но 6' есть отрицание выводимого нами утверждения 6, и поэтому само выражение 6 приводить к противоречию уже не будет (что-нибудь одно!). И, следовательно, выводимо.

Делаем подстановки, строим резольвенты.

Резольвенты		Подстановки
7'. $\text{НА}(\text{О},\text{Я},c,g_3(c,s))$,	(2', 5')	-
8'. $\overline{\text{НА}}(\text{О},\text{Я},c,S\text{н})$,	(3', 6')	c/x; $S\text{н}/s$.
9'. "Л" .	(7', 8')	$S\text{н}/g_3(c,s)$.

Нашли "пустой" дизъюнкт. Это значит, что наше утверждение

∃ s(У(О,Б,x,s)) верно: "Да, существует такое состояние *s*, при котором Бананы в руках у Обезьяны".

Возможны другие пути. Например:

7''. (1', 4'), 9''. (3', 8''),

8''. (7'', 2'), 10''. (6', 9''). И т.п.

В качестве упражнения предлагаем раскрыть эти резольвенты, разумеется, с учетом подстановок.

Упражнения.

Определите, какие из нижеприведенных формул общезначимы, а какие невыполнимы.

а. $\overline{\forall} xP(x) \wedge \overline{\exists} yP(y)$;

б. $\overline{\exists} xP(x) \to \overline{\forall} yP(y)$;

в. $\overline{\forall} xP(x) \wedge \overline{\exists} yP(y)$;

г. $\forall xP(x) \wedge \exists x \neg P(x)$;

д. $\exists xP(x) \to \exists yP(y)$;

е. $\forall xP(x) \vee \exists y \neg P(y)$.

2. Привести к предваренной форме, сделать преобразования и доказать следующие тождества.

а. $\forall xP(x) \to (\exists yP(y) \to (\forall xP(x) \wedge \forall zP(z)))$;

б. $(\exists xP(x) \wedge \forall xP(x)) \to \forall yP(y)$;

в. $\exists xQ(x) \to (\forall yP(y) \to \forall zQ(z))$;

г. $\exists xQ(x) \to (\forall xQ(x) \vee \forall yP(y))$;

д. $(\exists xP(x) \to \forall yQ(y)) \to ((\forall xP(x) \to \exists z\text{-}Q(z)) \to \forall u \neg P(u))$;

е. $(\overline{\forall} xP(x) \vee \overline{\exists} yQ(y)) \to (\exists xP(x) \to \overline{\exists} zQ(z))$;

ж. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists xP(x) \to \exists xQ(x))$;

з. $(\forall xP(x) \vee \forall yQ(y)) \to \forall z(P(z) \vee Q(z))$.

3.Доказать тождества методом опровержения.

а. $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \to (\exists yP(y) \wedge \exists zQ(z))$;

б. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists xP(x) \to \exists zQ(z))$;

в. $\exists y \forall xP(x,y) \to \forall x \exists yP(x,y)$;

г. $\exists x P(x) \rightarrow \forall y P(y)$;

д. $\forall x P(x) \rightarrow ((\exists y P(y) \rightarrow \forall y Q(y)) \rightarrow \exists z Q(z))$.

4..Докажите нижеследующие силлогизмы.

А.. Кто мяукает, тот кошка.
Собаки – не кошки.
Следовательно: собаки не мяукают.

Б. Без свободы нет счастья.
Без счастья нет любви.
След.: «Где нет свободы, быть не может любви».

В. Моряки – сильные люди.
Сильные люди не плачут.
Мишка – моряк,
След.: он не плачет.