

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ КАК МЕТОД ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЗНАНИЙ

1. Определение высказываний

Под высказыванием обычно понимают некоторое сообщение, предложение, выражение, утверждение и т.п. Но такое широкое толкование нам не подходит, его надо конкретизировать. Если, услышав сообщение «идет дождь», вы просто приняли его к сведению и перед выходом из дома взяли зонт, то с точки зрения ИВ это сообщение не является высказыванием. Если же после указанных слов вы подошли к окну, чтобы удостовериться в их истинности, то такое сообщение уже можно определить именно как высказывание. Итак, всякое высказывание предполагает оценку его истинности (ложности).

Простые, односложные высказывания обозначаются строчными латинскими буквами $a, b, m, l, r, q...$ Это высказывания типа «светает», «дом белый», «сегодня холодно», «Петя любит Машу». Если установлено, что высказывание r истинное, то пишут $r = И$ (или $r = 1$), если r ложное, то $r = Л$ ($r = 0$).

Каждое высказывание может быть либо истинным, либо ложным, третьего не дано - таков закон "исключенного третьего".

Простые высказывания называют еще элементарными или атомарными.

Дадим такое определение:

аксиоматическая система, предназначенная для моделирования и изучения логики высказываний, называется исчислением высказываний.

Начнем теперь определять формальную теорию, лежащую в основе исчисления высказываний.

2. Алфавит исчисления высказываний

Алфавит A часто называют словарем. Этот словарь, во-первых, содержит сами высказывания $a, b, m, n, ...$ Во-вторых, он содержит еще так называемые логические связки. Они хорошо известны читателю по курсам дискретной математики, логических основ ЭВМ, программирования и др. Мы все-таки перечислим их, тем более что в ИИ они используются в расширенном составе и в разных обозначениях (см. таблицу 1).

Таблица 1

Название	Обозначение	Тип
Отрицание	$\neg$, $\overline{}$, <i>not</i> , <i>НЕ</i>	унарный
Конъюнкция	$\wedge$, <i>&</i> , <i>and</i> , <i>И</i>	бинарный
Дизъюнкция	$\vee$, <i>+</i> , <i>or</i> , <i>ИЛИ</i>	бинарный
Импликация	$\rightarrow$	бинарный
Эквивалентность	$\equiv$	бинарный

Тип отрицания унарный, потому что оно может быть приложено к одному высказыванию, даже если это высказывание - сложное выражение. Остальные - бинарные, т.к. они могут соединять как минимум два высказывания. Действия связок определяются таблицей истинности:

Таблица 2

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \rightarrow y$	$y \equiv x$	$\overline{x} \vee y$
<i>И</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>И</i>
<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>
<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>
<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>И</i>

В данном пособии мы будем употреблять следующие обозначения

отрицания: $\overline{X}$;

конъюнкции: $X \wedge Y$ или XY , или $X \cdot Y$;

дизъюнкции: $X \vee Y$ или $X + Y$;

импликации: $X \rightarrow Y$;

эквивалентности: $X \equiv Y$.

С помощью связок из простых высказываний можно строить более сложные высказывания, употребляя при этом еще и различные скобки:

$$(q \rightarrow p) \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r];$$

$$[[(a \vee b) \wedge m] \rightarrow b] \rightarrow a.$$

Не будем останавливаться на хорошо всем известных толкованиях связок конъюнкции (*И*) и дизъюнкции (*ИЛИ*). Заметим только, что за исключением импликации все остальные связки подчиняются перестановочному закону, т.е. не меняют своего значения, если x и y поменять местами.

Особый разговор об импликации. Условно она моделирует утверждение типа "если $x...$, то $y...$ ". Условность здесь заключается в том, что не всегда поведение её очевидно. Например, выражение: "если x - ЛОЖЬ, то y - ИСТИНА" оказывается ИСТИННЫМ. Тем не менее, эта связка широко применяется, поскольку отражает одно из основных логических понятий.

Импликация неперестановочна. Пусть мы имеем такое высказывание: "если два слагаемых нечетные (r), то их сумма - четная (q)". Оно представляется импликацией $r \rightarrow q$, которая, очевидно, истинна: $(r \rightarrow q) = И$. Попробуем поменять местами r и q : $q \rightarrow r$. Новая импликация означает: "если сумма двух слагаемых четная (q), то оба слагаемых нечетные (r)", что верно только отчасти. Импликация отображает причинно-следственные связи и предостерегает нас от широко распространенной логической ошибки, когда причину и следствие меняют местами. Первую часть импликации называют посылкой или *антецедентом*, вторую - заключением или *консеквентом*.

Обратимся к приведенной выше таблице истинности и отметим следующее:

- если посылка импликации истинна, то значение истинности импликации совпадает со значением заключения;
- если посылка ложна, импликация всегда истинна;
- импликация ложна только при одном значении посылки ($И$) и заключения ($Л$);
- если посылка истинна и вся импликация истинна, то и заключение истинно (правило заключения или *modus ponens*).

Кстати говоря, импликацию, так же, как и эквивалентность, можно исключить:

$$(x \rightarrow y) = (\bar{x} + y); (r \equiv p) = (r \rightarrow p)(p \rightarrow r) = (\bar{r} + p)(\bar{p} + r).$$

Первое равенство следует из сравнения соответствующих колонок таблицы 2, второе предлагаем доказать самостоятельно.

3. Синтаксис исчисления высказываний

Речь идет о правилах V построения сложных высказываний. Как уже говорилось, такие высказывания строятся (не считая скобок) с помощью логических связок - и только. Естественно назвать такие сложные высказывания формулами. Но в ИВ в целях общности рассуждений формулами называют также и атомарные высказывания

типа r , p и т.п. Если речь идет вообще о формулах, то их обозначают через прописные латинские буквы: A , B , N , P ...

Из сказанного можно сформулировать следующие синтаксические правила:

(1) *всякое высказывание есть формула;*

(2) *формулы, построенные с помощью логических связок и скобок, называются **правильно построенными формулами (ппф)**.*

Второе правило вводится единственно для того, чтобы подчеркнуть необходимость построения новых формул только с помощью известных пяти связок. Стараясь подчеркнуть универсальность этих связок, их "формулообразующие" свойства, эти связки часто называют *пропозициональными*.

Два указанных правила определяют синтаксис языка исчисления высказываний. В любых языках синтаксис дает возможность распознавать фразы среди различных наборов слов. В нашем случае он определяет формулы, которые здесь являются аналогами фраз.

Но нас интересует еще и семантика языка, т.е. определение значений, которые принимают формулы. Поскольку каждое элементарное высказывание может принимать два значения: либо I , либо L , то формулы, построенные на их основе и являющиеся ппф, очевидно, также будут иметь только два значения: I или L : значение сложной формулы есть функция значений ее составляющих.

Рассмотрим, например, ппф импликации $p \rightarrow q$. При значениях $p = I$ и $q = L$ эта формула принимает значение L , при всех других - значение I . Приписать p и q какие-то определенные значения I (L) означает задать *интерпретацию* формулы.

Скажем, дизъюнкция $a + b$ принимает значение L только при интерпретации $a = L$ и $b = L$.

Если некоторая формула принимает значение I при любой интерпретации входящих в нее атомарных высказываний (формул), то она называется *общезначимой*, *универсально-истинной*, *тождественной* или *тавтологией*. Примеры тавтологий:

$$(a + a) \rightarrow a; (a + b) \rightarrow (b + a); (a + \bar{a}).$$

Если формула принимает значение истины хотя бы при одной интерпретации, она называется *выполнимой*. Дизъюнкция и конъюнкция - выполнимые формулы. Все элементарные высказывания выполнимы по определению.

Есть, однако, формулы, которые ложны при всех интерпретациях, например, конъюнкция $x \wedge \bar{x}$. Такие формулы

называются *невыполнимыми* или *противоречивыми*. Отрицание общезначимой формулы - невыполнимая формула.

4. Преобразование формул

Успешное решение проблем логического вывода требует представления формул в определенном виде, для чего их необходимо преобразовывать, естественно, сохраняя истинность. Правила преобразования логических формул широко известны под названием булевой алгебры. Здесь мы просто перечислим их, иногда опуская знак конъюнкции, как это принято при обозначении умножения в алгебре, а дизъюнкцию обозначая через «+».

Для дизъюнкции имеем равенства:

$$\begin{array}{ll} L + L = L, & x + L = x, \\ L + I = I, & x + I = I, \\ I + L = I, & x + x = x, \\ I + I = I, & x + \bar{x} = I. \end{array}$$

Для конъюнкции соответственно:

$$\begin{array}{ll} L \wedge L = L, & x \wedge L = L, \\ L \wedge I = L, & x \wedge I = x, \\ I \wedge L = L, & x \wedge x = x, \\ I \wedge I = I, & x \wedge \bar{x} = L. \end{array}$$

Основные законы алгебры Буля

1. Переместительный

$$\begin{array}{l} x + y = y + x, \\ xy = yx. \end{array}$$

2. Сочетательный

$$\begin{array}{l} (x + y) + z = x + (y + z), \\ x(yz) = (xy)z. \end{array}$$

3. Распределительный

а) раскрытие дизъюнкции по конъюнкции:

$$(x + y)z = xz + yz,$$

б) раскрытие конъюнкции по дизъюнкции:

$$(xy) + z = (x + z)(y + z).$$

4. Правило де Моргана:

$$\begin{array}{l} \overline{(x + y)} = \bar{x} \cdot \bar{y}, \\ \overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}. \end{array}$$

5. Исключение отрицания: $\overline{\bar{x}} = x$.

6. Исключение импликации:

$$\frac{x \rightarrow y = \bar{x} + y,}{(x \rightarrow y) = x\bar{y}}.$$

7. Исключение эквивалентности

$$x \equiv y = (x \rightarrow y)(y \rightarrow x) = (\bar{x} + y)(x + \bar{y}).$$

8. Контрапозитивный закон

$$x \rightarrow y = \bar{y} \rightarrow \bar{x}.$$

9. Формулы склеивания

$$xy + x\bar{y} = x;$$

$$(x + y)(x + \bar{y}) = x.$$

10. Формулы поглощения

$$x + xy = x; \quad x(x + y) = x;$$

$$x + y\bar{x} = x + y; \quad x(\bar{x} + y) = xy.$$

В дальнейшем нам особенно часто придется пользоваться распределительным законом, а именно - раскрытием конъюнкции по дизъюнкции. Чаще всего этот случай встречается в задачах приведения исходной формулы к конъюнктивной нормальной форме. Рассмотрим маленький пример. (Для удобства чтения конъюнкцию иногда будем писать через точку).

Известно, что эквивалентность выражается формулой $x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y}$. Приведем ее к виду соотношения 7. Раскрываем первую конъюнкцию xy по дизъюнкции: $(x + x \cdot y)(y + x \cdot y)$ и затем применяем этот закон внутри скобок: $[(x + \bar{x})(x + \bar{y})][(y + \bar{x})(y + \bar{y})]$. Первая и последняя дизъюнкции - тождества, т.е. равны I , в общей конъюнкции их можно отбросить (ибо $z \wedge I = z$). Окончательно:

$$xy + \bar{x} \cdot \bar{y} = (x + \bar{y})(\bar{x} + y)$$

5. Множество базовых аксиом

Как уже говорилось выше, в качестве базовых аксиом выбираются всегда общезначимые формулы. Их можно выбрать по-разному. Десять подобных формул мы только что рассматривали в виде законов алгебры Буля.

В рамках исчисления высказываний в дополнении к этим законам предлагаются разные варианты систем аксиом.

Остановимся на следующей системе:

$$(A1) \quad A \rightarrow (B \rightarrow A);$$

$$(A2) \quad (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C));$$

$$(A3) \quad (\bar{A} \rightarrow \bar{B}) \rightarrow ((\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow A).$$

Общезначимость (тождественность) всех этих постулатов легко можно проверить простой подстановкой различных значений A , B и C . Но это займет много места. Поэтому покажем общезначимость только первого постулата. Что же касается других, то в качестве примера они будут доказаны иными методами несколько позже.

Итак, первый постулат. Подставим в (A1) $B = И$, $A = Л$. Тогда, согласно таблице истинности, импликация $(B \rightarrow A) = Л$. Так как A ложно, получающаяся при этом вторая импликация типа $Л \rightarrow Л$ истинна.

Теперь введем интерпретацию $B = Л$ и $A = Л$, тогда импликация в скобках $(B \rightarrow A) = И$, а основная импликация принимает вид $Л \rightarrow И$, что дает опять-таки $И$.

Примем $A = И$ и $B = И$. Легко показать, что окончательная импликация здесь приходит к виду $И \rightarrow И$, т.е. равна $И$.

Наконец, положим $A = И$, $B = Л$. По таблице истинности $(B \rightarrow A)$ здесь равна $И$, а конечная ситуация $И \rightarrow И$ снова дает $И$.

Но тождественность постулатов не единственное условие, которому система W (см. п. 4.2.2) должна удовлетворять. Необходимо, чтобы постулаты были *независимы*. Это значит, что ни один из них нельзя вывести из двух оставшихся. Кроме того, система W должна быть еще и *полной*. Полнота системы означает, что любая ппф, выводимая из этой системы, общезначима, и наоборот, любая общезначимая формула, полученная в рамках ИВ, - выводима из данной системы аксиом. Желательно при этом, чтобы система была *минимальна*, т.е. не содержала "лишних" аксиом, хотя очевидно, что *присоединение к системе W любой общезначимой (и, следовательно, выводимой) формулы полноту системы не нарушает*.

6. Правила вывода

Напомним, что множество R (п. 4.2.2) содержит такие правила, которые позволяют на основании принятых постулатов определять истинность любых других выражений (ппф). Другими словами, они позволяют из тождественно истинных формул выводить другие тождественно истинные формулы. Эта процедура так и называется *вывод* (или иначе - *доказательство*). Полученные в результате общезначимые формулы называются *тавтологиями* или *теоремами*.

Если формула B выводима из формулы A , то пишут $A \vdash B$. Формулы же, принятые за аксиомы, обозначаются без антецедента: $\Box A$ (говорят: A выводится из пустого множества).

Основное множество R содержит два правила:

- правило подстановки и
- правило заключения.

Правило подстановки. Обратимся вновь к первому постулату (A1). Он общезначим при всех интерпретациях. Заменяем теперь формулу A на формулу D . У этой формулы, так же, как и у A , только два возможных значения $И$ или $Л$. Перепишем теперь постулат: $D \rightarrow (B \rightarrow D)$ - и что изменилось? При любых значениях D постулат все равно общезначим.

Отметим теперь, что A - прописная буква, т.е. под ней понимается любая другая, в том числе и сложная, ппф. Пусть теперь A заменяется на формулу $(a + b) \rightarrow r$. При различных интерпретациях a , b и r эта формула может принимать всего лишь два значения $И$ или $Л$. Поэтому, подставив указанную ппф вместо A : $((a + b) \rightarrow r) \rightarrow [B \rightarrow ((a + b) \rightarrow r)]$, мы, как и прежде, не нарушаем ее тождественности. Такие же рассуждения можно привести и относительно B . Отсюда правило подстановки:

в любую общезначимую формулу X , содержащую формулу Y , можно вместо Y подставить любое другое высказывание (формулу) Z при условии, что это сделано во всех местах вхождения Y . Истинность X при этом не меняется.

Оговорка насчет всех мест вхождения очень существенна. Посмотрите: D мы вводим вместо A в обоих случаях. Недопустимо заменять только одно A , а также одно A заменить на D , а другое на C . В общезначимой формуле $\bar{a} + a$ заменим одно a на r : $\bar{a} + r$. Полученная формула уже не общезначима! Но вполне допустимо заменять разные буквы на одни и те же: постулат (A1), представленный в виде $C \rightarrow (C \rightarrow C)$, все равно общезначим.

Правило заключения. Это правило часто называют по-латыни *modus ponens* (MP). Правило заключения нам уже известно. Оно рассматривалось в рассказе об импликации как следствие ее свойств. Напомним суть: если импликация $p \rightarrow q$ истинна и p истинна, то и q тоже истинна. Иначе говоря,

если импликация истинна и антецедент истинен, то и консеквент тоже истинен.

Пусть, например, имеется аксиома $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow A))$, она всегда истинна. Если окажется, что при этом $A = И$, то по правилу MP консеквент $(B \rightarrow A)$ будет также истинен.

Разберем теперь пример: пользуясь правилами вывода, показать, что формула $A \rightarrow A$ выводима из аксиом (A1) - (A3) и, следовательно, тавтология.

Возьмем постулат (A1): $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ и сделаем в нем подстановку: вместо B подставим $(A \rightarrow A)$, получим:

$$1) A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A).$$

Возьмем теперь (A2). Подставив $(A \rightarrow A)$ вместо B и A вместо C , получим

$$2) (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)).$$

Антеcedент формулы 2) совпадает с аксиомой 1) и потому истинен. Применяя *modus ponens* к 1) и 2), получаем тавтологию:

$$3) (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A).$$

Снова берем постулат (A1) и заменяем B на A :

$$4) A \rightarrow (A \rightarrow A).$$

Антеcedент формулы 3) совпадает с 4) и, следовательно, истинен. Применяя *MP*, получаем тавтологию:

$$5) A \rightarrow A.$$

7. Нормальные формы

Нормальные формы играют важную роль, поскольку позволяют стандартизировать и упрощать процесс логического вывода и анализа формул.

Формула исчисления высказываний имеет **нормальную форму**, если она не содержит связок импликации ($\rightarrow$) и эквивалентности ($\equiv$) и знаки отрицания стоят в ней только при переменных.

Освободиться от импликации и эквивалентности мы можем, применяя соотношения алгебры Буля 6 и 7, перенос и исключение отрицания - по правилу де Моргана и равенству 5 (стр. 52).

Все эти преобразования относятся к *равносильным*. Две формулы являются *равносильными*, если их таблицы истинности совпадают.

Ниже предлагаются некоторые полезные равносильные соотношения, следующие из прямого применения закона раскрытия конъюнкции по дизъюнкции. Их легко доказать самостоятельно. (Поскольку они следуют из законов Буля, мы продолжим их нумерацию из п. 5.4.).

$$11. ab + cd = (a + c)(a + d)(b + c)(b + d);$$

$$12. abc + r = (a + r)(b + r)(c + r);$$

$$13. (a + b)(x + y) + m = (a + b + m)(x + y + m);$$

$$14. abc + p + q + r = abc + (p + q + r) = (a + p + q + r)(b + p + q + r)(c + p + q + r).$$

Разберем теперь некоторые примеры. На них мы хотим показать, как переход к нормальной форме упрощает доказательство.

Пример 1. Привести выражение $ab \equiv \overline{(a \rightarrow b)}$ к нормальной форме и доказать его тождество.

$$ab \equiv \overline{(a \rightarrow b)}; \quad ab \equiv \overline{(a + \overline{b})}; \quad ab \equiv \overline{\overline{ab}}; \quad ab \equiv ab.$$

Далее применяем соотношение 7:

$$ab \equiv ab = ((\overline{ab}) + ab)(ab + \overline{ab}) = I.$$

Пример 2. Привести к нормальной форме и доказать истинность постулата (А3) системы аксиом ИВ

$$(\overline{A} \rightarrow \overline{B}) \rightarrow ((\overline{A} \rightarrow B) \rightarrow A).$$

Освобождаемся от импликации:

$$\overline{(A + \overline{B})} + ((\overline{A} \rightarrow B) + A) = B\overline{A} + \overline{(A + B)} + A.$$

Далее:

$$B\overline{A} + \overline{A}\overline{B} + A = \overline{A}(B + \overline{B}) + A = I.$$

В дальнейшем, с целью упрощения, будем называть *литерой* любое элементарное высказывание (или его отрицание).

Дизъюнктом будем называть дизъюнкцию некоторого числа литер:

$$(I_1 \vee I_2 \vee I_3 \vee \dots \vee I_n) \text{ или } (I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n).$$

Любое логическое выражение (ппф) может быть представлено либо в дизъюнктивной, либо в конъюнктивной нормальной форме. *Дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ) называется дизъюнкция конечного числа конъюнкций. *Конъюнктивной нормальной формой* (КНФ) называется конъюнкция конечного числа дизъюнктов. Особый интерес к дизъюнктам объясняется их "наглядностью". В самом деле, достаточно лишь одному из "слагаемых" дизъюнкта принять значение *И* ("1"), как весь дизъюнкт принимает значение *И* ("1"). Это очень удобно, когда решается вопрос о тождественности той или иной формулы. Переход от нормальной формы выражения к его конъюнктивной нормальной форме в основном осуществляется путем применения распределительного (дистрибутивного) закона. Приведенные выше равносильные соотношения 11-14 иллюстрируют примеры его применения.

Пусть задана формула $(p(s + r + q)) \rightarrow (p \rightarrow (s \rightarrow r))$.

Приводим ее к нормальной форме.

1. Исключаем импликацию

$$\overline{(p(s + r + q))} + (\overline{p} + (\overline{s} + \overline{r})).$$

2. Переносим и снимаем отрицания (желательно, чтобы отрицание относилось не более чем к одной литере)

$$(\bar{p} + (s + r + q)) + (\bar{p} + \bar{s} + r); (\bar{p} + (\bar{s} \cdot \bar{r} \cdot \bar{q})) + (\bar{p} + \bar{s} + r);$$

Некоторые скобки можно опустить:

$$(\bar{s} \cdot \bar{r} \cdot \bar{q}) + (\bar{p} + \bar{p} + \bar{s} + r).$$

Упрощая, получаем нормальную форму:

$$(\bar{s} \cdot \bar{r} \cdot \bar{q}) + (\bar{p} + \bar{s} + r).$$

3. Применяем распределительный закон: раскрываем конъюнкцию по дизъюнкции (ср. равносильность 14):

$$(\bar{s} + (\bar{p} + \bar{s} + r))(\bar{r} + (\bar{p} + \bar{s} + r))(\bar{q} + (\bar{p} + \bar{s} + r)).$$

Исключая внутренние скобки и пользуясь условием $\bar{r} + r = 1$, замечаем, что второй дизъюнкт равен 1 и, следовательно, исключается из общей конъюнкции. Окончательно получаем КНФ:

$$(r + \bar{p} + \bar{s})(\bar{q} + \bar{p} + \bar{s} + r).$$

Роль КНФ для оценки значений формул трудно переоценить. Часто возникает вопрос: нельзя ли установить какую-либо связь между структурой формулы и ее семантикой? То есть связь между ее логической формой и логическим содержанием? Оказывается, такая связь существует, и можно указать простой метод, позволяющий по виду формулы, приведенной к определенному виду, судить о том, тождественна она или нет. Метод как раз и заключается в приведении исходной формулы к нормальной конъюнктивной форме и последующем ее анализе.

Пусть имеется некоторое выражение F , представленное КНФ, $F = (a + b + r)(a + \bar{r} + b + s + r)(b + r + s + \bar{s})$. Сразу видно, что второй и третий дизъюнкты равны 1, поскольку имеют по две одинаковые переменные, одна из которых - отрицание другой. Эти дизъюнкты можно опустить. Но сама формула $F = (a + b + r)$ - необщезначима и не противоречива, т.е. выполнима.

Пусть теперь формула F имеет другой вид:

$F = (a + b + p)r(b + p)(b + p + r)\bar{r}$. В ее составе два однолитерных дизъюнкта (r и $\bar{r}$) причем один из них является отрицанием другого. Такие литеры называются *контрарными*. Конъюнкция контрарных литер равна 0, и поэтому мы имеем невыполнимую функцию

$$F = 0 (Л).$$

Общий вывод. Для того, чтобы некоторая КНФ-формула была общезначима необходимо и достаточно, чтобы каждый из ее дизъюнктов содержал хотя бы одну пару контрарных литер. Для

того, чтобы некая КНФ была невыполнима, необходимо, чтобы она содержала хотя бы одну пару однолитерных контрарных дизъюнктов.

8. Свойства ИВ как аксиоматической системы

То, что ИВ является аксиоматической системой, следует из всего вышесказанного, так сказать, по построению. Здесь мы хотим лишь подчеркнуть некоторые свойства, присущие ИВ как всякой системе подобного рода.

В основе аксиоматической системы лежит формальная теория. Что это означает, мы видели выше. Это означает, в частности, что в системе определено некоторое множество W базовых аксиом, из которых через процедуру вывода по правилам R можно вывести некоторую формулу B , обязательно общезначимую, ибо множество W общезначимо по определению, а правила вывода не меняют истинности. Поскольку B общезначимо, то, очевидно, ее отрицание $\bar{B} = L$, т.е. невыполнимо и невыводимо из W .

Этот факт говорит о непротиворечивости системы:

система непротиворечива, если в ней невыводимы никакие две формулы, одна из которых является отрицанием другой.

Ранее мы определили понятие полноты системы аксиом, согласно которому, любая общезначимая ппф может быть выведена из этой системы и, следовательно, ее присоединение к этой системе полноту последней не нарушает. Покажем теперь, что полнота и непротиворечивость связаны между собой:

нарушение полноты приводит к нарушению непротиворечивости системы.

Дизъюнкция $A + B$, например, не является общезначимой ппф и потому невыводима из принятой ранее системы аксиом (A1) - (A3). Предположим, однако, что она выводима и, следовательно, может быть добавленной к системе в виде четвертого постулата. Далее рассуждаем следующим образом.

Представим дизъюнкцию $A + B$ в виде импликации:

1) $\bar{A} \rightarrow B$,

и так как она теперь считается общезначимой, проводим ряд подстановок и получаем "тавтологии":

2) $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$ (заменив B на $\bar{B}$),

3) $A \rightarrow B$ (заменив в 1) A на $\bar{A}$).

Правило *modus ponens* может быть теперь применено к постулату (A3), т. к. его посылка ($\neg A \rightarrow \neg B$) теперь общезначима согласно тождеству 2). Отсюда справедливо тождество:

$$4) (\neg A \rightarrow B) \rightarrow A.$$

Применив *MP* к тождествам 1) и 4), имеем

$$5) A = И.$$

Заменим в 4) A на $\neg A$:

$$6) (A \rightarrow B) \rightarrow \neg A.$$

Применяя теперь *MP* к 6) с учетом 3), получаем неопровержимо:

$$7) \neg A = И.$$

Сравнивая 7) и 5), отмечаем явное противоречие. Отсюда определение:

система полна, если присоединение к аксиомам какой-либо невыводимой формулы делает ее противоречивой.

9. Проблема логического вывода

Ранее мы говорили о выводе общезначимых формул (тавтологий, тождеств) из базовой системы аксиом. Рассмотрим вопрос вывода шире. Пусть имеется множество необщезначимых формул $E_1, E_2, E_3 \dots E_n$, обладающих тем свойством, что при некоторых интерпретациях они одновременно принимают значение *И*. Формула B выводима из множества $\{E\}$, если она может быть выведена из него путем применения правила заключения. (Правило подстановки применяется только для общезначимых формул). Технически процесс вывода будет заключаться в получении ряда последовательных формул $B_1, B_2, B_3 \dots$, каждая из которых выводится из всех E плюс те B_i , что уже получены прежде. Процесс длится до тех пор, пока одна из очередных B_k не совпадет с B , т.е. когда $B_k = B$.

Правило заключения не меняет истинности, и потому справедливо утверждение, что если B выводима из $\{E\}$, то она должна принимать значения *И* при тех же интерпретациях, что и все E_i . (Вообще-то формулы E_i могут принимать самые разные значения. Речь идет о значениях истинности, общих для всех них и B в том числе).

Пишут:

$$(E_1, E_2, \dots E_n) \vdash B \text{ или короче } \{E\} \vdash B.$$

Говорят также, что B есть *логическое следствие* из посылок $\{E\}$. Вывод из системы аксиом теперь можно рассматривать как частный случай, когда выполняется условие $\{A\} \vdash B$.

Пример. Знакомое нам правило заключения можно переписать следующим образом: $(p, p \rightarrow q) \vdash q$, т.е. q - логическое следствие посылок p и $p \rightarrow q$. Справедливость этого легко проверяется по таблице истинности: высказывание q принимает значение *И*, как только p и

$(p \rightarrow q)$ одновременно принимают значение *И*.

Проблема вывода сводится, таким образом, к *проблеме дедукции*, которая формулируется следующим образом:

требуется определить, является ли формула B логическим следствием множества формул $\{E\}$.

Чтобы подчеркнуть, что Ei не являются аксиомами, их иногда обозначают через Hi и называют гипотезами, а формулу B - заключением:

$$(H_1, H_2, \dots H_n) \vdash B. \quad (5.1)$$

Если гипотезы рассматривать как посылки в рассуждении, то из определения логического следствия следует, что заключение истинно только тогда, когда все посылки истинны. Заметим также, что если для множества $\{E\}$ не существует такой интерпретации, при которой все Ei принимают значения *И*, то множество $\{E\}$ считается невыполнимым и обозначается

$$(E_1, E_2, \dots E_n) \vdash \text{Л или } (H_1, H_2, \dots H_n) \vdash \text{Л} \quad (5.2)$$

Сразу же отметим одно важное свойство, следующее из определения логического следствия. Если $\{E\} \vdash B$, то B принимает значение *И* как только все Ei также принимают значение истинности. Исключается, таким образом, случай, когда $B=\text{Л}$ при всех $Ei=\text{И}$ (обозначим: $\{E\}=\text{И}$). Остальные варианты вполне допустимы. Сведем их в табличку, добавив столбец с импликацией, которая нам сейчас пригодится:

Таблица 3		
$\{E\}$	B	$\{E\} \rightarrow B$
<i>И</i>	<i>И</i>	<i>И</i>
<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>
<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>
<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Исключ.</i>

Из таблицы 3 следует очевидный и важный вывод: если B - логическое следствие из множества $\{E\}$, то импликация $\{E\} \rightarrow B$ - тождественно истинна.

Условие одновременной истинности всех E_i соответствует требованию конъюнкции. Следовательно, можно написать

$$(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3 \dots \wedge E_n) \rightarrow B \equiv I$$

или иначе $(H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \dots \wedge H_n) \rightarrow B \equiv I. \quad (5.3)$

Вопрос, таким образом, сводится к определению тождественности выражения (5.3).

Пример. Известное нам правило заключения может быть записано следующим образом

a) $(p, p \rightarrow q) \vdash q.$

Если q - логическое следствие из p и $p \rightarrow q$, то выражение

b) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

должно быть тождеством.

Покажем это. Приведем ппф b) к конъюнктивной нормальной форме (дизъюнкцию будем обозначать +).

Освободимся от импликаций и преобразуем:

$$\overline{p(\overline{p} + q)} + q$$

$$\overline{p} + \overline{(\overline{p} + q)} + q;$$

$$\overline{p} + (p\overline{q} + q);$$

c) $(\overline{p} + q) + (p\overline{q}).$

К выражению c) применим распределительный закон раскрытия конъюнкции по дизъюнкции:

d) $(p + \overline{p} + q)(p + q + \overline{q}) \equiv I.$

Полученная конъюнктивная форма d), очевидно, тождественна, поскольку каждый из двух ее дизъюнктов равен I , (ибо $p + \overline{p} = I$, $q + \overline{q} = I$). Что и требовалось доказать.

В данном примере мы вновь встретились с задачей определения тождественности формулы. В более общей формулировке она будет встречаться нам и в дальнейшем: требуется определить, к какому из трех классов принадлежит данная формула, является ли она: а) тождественной, б) невыполнимой или в) выполнимой. В этом состоит *проблема разрешения*.

10. Алгоритмическая проблема разрешения в ИВ

Задача, состоящая в отыскании процедуры, позволяющей для любой формулы выяснить, к какому из трех вышеуказанных классов она принадлежит, называется еще *семантической проблемой*

разрешения. В соответствии с этим, процедура, позволяющая конечным числом простых действий решить проблему разрешения, называется разрешающей процедурой. Самое естественное решение здесь - обратиться к таблице истинности. Таблица даст исчерпывающий ответ о поведении формулы при всех возможных интерпретациях. Но этот прием малоэффективен, поскольку практически он применим лишь для малого числа аргументов (литер). Если формула из двух литер имеет 4 варианта интерпретаций (т.е. 4 строки), то формула из четырех литер уже 16, из пяти соответственно 32 и т.д. по степени 2^n строк таблицы истинности. Кстати, этот прием мы применили, когда доказывали тождественность первого постулата ИВ (A1).

Заметим, однако, что для того, чтобы получить разрешающую процедуру, достаточно найти способ, позволяющий отличить тождественные формулы от всех остальных. Применяем эту процедуру к некоторой формуле A и, если окажется, что A общезначима, то проблема решена. Если же выясняется, что A не общезначима, то применяем эту процедуру для формулы $\bar{A}$. Если $\bar{A}$ окажется тождественной, то, очевидно, A - противоречива. Если $\bar{A}$, так же, как и A , не тождественная, то это уже значит, что формула A просто выполнима.

Существует несколько методов оценки тождественности формулы:

- 1) оценка с помощью таблицы истинности,
- 2) оценка через преобразование, упрощение и приведение к нормальным формам,
- 3) оценка путем логического вывода из системы аксиом,
- 4) оценка методом редукции,
- 5) оценка методом опровержения.

Некоторые из этих методов мы уже "прошли", с другими предстоит познакомиться. Так, например, в п. 5.5 мы проводили оценку тождественности постулата (A1) с помощью таблицы истинности. Анализ значений нормальных форм был посвящен п. 5.7. В п. 5.6 строгим логическим выводом доказали тавтологию $A \rightarrow A$.

В ряде случаев для определения тождеств удобен так называемый *алгоритм редукции*. Алгоритм основан на доказательстве путем приведения к абсурду. Метод особенно хорош, когда формула содержит много импликаций. Рассмотрим его на примере второго постулата (A2) исчисления высказываний.

Предположим невероятное, что (A2) ложен, и докажем абсурдность этого предположения.

Итак, пусть

$$1) [(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))] = Л.$$

По свойству импликации, она ложна, если антецедент истинен, а консеквент - ложен, т.е.

$$2) (A \rightarrow (B \rightarrow C)) = И,$$

$$3) ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) = Л.$$

Тогда из равенства 3) следует:

$$4) (A \rightarrow B) = И,$$

$$5) (A \rightarrow C) = Л.$$

Ложность $(A \rightarrow C)$ означает, что $A = И, C = Л$.

Применив *modus ponens* к $(A \rightarrow B)$, получаем: если $A = И$, то и $B = И$. Подставим теперь полученные значения A, B и C в 2), получим

$$6) (A \rightarrow (B \rightarrow C)) = (И \rightarrow (И \rightarrow Л)) = Л,$$

что противоречит ранее полученному значению 2). Мы пришли к абсурду и тем самым показали, что исходный постулат общезначим.

К сожалению, алгоритм редукции не всегда удобен в применении и не может быть рекомендован как универсальный метод определения тождественности.

11. Теорема дедукции

Проблема разрешимости тесно связана с проблемой вывода. Методов много, но тем не менее, процесс этот остается достаточно утомительным даже для простых примеров. Проблема вывода существенно упрощается, если применить *теорему дедукции*. Пусть имеется множество гипотез $\{H\}$ и H_n - одна из них.

Теорема утверждает, что

необходимым и достаточным условием выводимости B из гипотез $\{H\}$ является выводимость импликации $(H_n \rightarrow B)$, то есть из утверждения $(H_1, H_2, \dots H_n) \vdash B$ следует:

$$(H_1, H_2, \dots H_{n-1}) \vdash (H_n \rightarrow B). \quad (5.4)$$

Пусть это условие выполняется и $(H_n \rightarrow B)$ выводимо. Обозначим эту формулу через $M1$. Тогда по условию теоремы должна быть выводимой формула $(H_{n-1} \rightarrow M1)$. Обозначим ее через $M2$, и теперь будет выводима формула $(H_{n-2} \rightarrow M2)$ и т.д. Формулировка теоремы, следовательно, сводится к следующей:

Если B выводима из гипотез $\{H\}$, то истинно выражение

$$(H_1 \rightarrow (H_2 \rightarrow (H_3 \rightarrow \dots (H_n \rightarrow B)) \dots)). \quad (5.5)$$

Необходимость утверждения доказывается следующим образом. Допустим, B истинна, тогда импликация $(Hn \rightarrow B)$ также истинна при любой Hn . Но это, в свою очередь, означает, что истинна и следующая импликация $(Hn_{-1} \rightarrow (Hn \rightarrow B))$ и т.д. вплоть до заключительной импликации $(H_1 \rightarrow (H_2 \rightarrow \dots))$. Что и требовалось доказать.

Выражение типа (5.5) с "вложенными" импликациями называется n -кратной импликацией. Доказав необходимость (5.5), мы вывели такое логическое утверждение:

если в n -кратной импликации заключение B истинно, то по всей вероятности ее посылки H_i тоже истинны.

Докажем, что это так и есть, т.е. докажем теперь достаточность. Она доказывается простым применением правила заключения. В самом деле, положим, что выражение (5.5) истинно.

Если H_1 принимает значение I , то по *modus ponens* истинно и всё выражение $(H_2 \rightarrow (H_3 \rightarrow \dots))$. Но при той же интерпретации истинна и H_2 , откуда следует, что истинно и выражение $(H_3 \rightarrow (H_4 \rightarrow \dots))$. И т.д. В конце цепочки рассуждений приходим к выводу, что истинна импликация $Hn \rightarrow B$ (выполнение условия (5.4) теоремы). Но Hn тоже гипотеза и тоже истинна.

Отсюда $B = I$.

Рассмотрим примеры.

а. Доказать свойство транзитивности импликации:

из условия $(A \rightarrow B)$ и $(B \rightarrow C)$, следует $(A \rightarrow C)$.

Вопрос сводится к доказательству логического следствия:

$$(A \rightarrow B, B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C). \quad (5.6)$$

Доказательство здесь неочевидно, но согласно теореме дедукции нам достаточно доказать условие:

$$(A \rightarrow B, B \rightarrow C, A) \vdash C.$$

Итак, имеем гипотезы:

а. $H_1: A \rightarrow B$,

б. $H_2: B \rightarrow C$,

с. $H_3: A$.

Применяя *MP* к a и c , получаем

д. B и далее:

е. C (*modus ponens* к b и d).

Что и требовалось.

б. Доказать выражение (5.6), пользуясь условием (5.5).

Гипотезы у нас уже обозначены. Подставляем их в (5.5):

$$((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))). \quad (5.7)$$

Импликация $A \rightarrow C$ является логическим следствием, если она принимает значение I тогда, когда все $H_i = I$. Пусть формула (5.7) истинна. Если теперь положим, что $(A \rightarrow B) = H_1$ истинна, то по MP

$$((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) = I.$$

Но $(B \rightarrow C) = H_2$ тоже истинна, и тогда $(A \rightarrow C) = I$ и потому является логическим следствием по условию (5.6).

12. Принцип дедукции

Вернемся к выражению (5.1) $(H_1, H_2, \dots H_n) \sqcap B$ и предположим, что оно выполняется, т.е. B - выводимо из $\{H\}$. Если это так, то присоединение B к множеству $\{H\}$ не влияет на полноту множества $\{H, B\}$ и не приводит его к противоречию. Иное дело $\bar{B}$, которая при этих условиях невыводима. Ее присоединение к $\{H\}$, очевидно, приведет к противоречивости, т.е. можно написать:

$$(H_1, H_2, \dots H_n, \bar{B}) \sqcap L. \quad (5.8)$$

При этих условиях тождественность импликации (5.3), естественно, нарушается, она становится невыполнимой. Возьмем отрицание импликации (5.3). Теперь должно выполняться условие

$$((H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \dots \wedge H_n) \rightarrow B) \vdash L \quad (5.9)$$

Доказав невыполнимость (5.8) или (5.9), мы косвенно докажем выполнимость условия (5.1). Такой метод доказательства "от противного" называется *доказательством по методу опровержения*.

Метод опровержения очень удобен. В самом деле, вместо того, чтобы кропотливо доказывать общезначимость какой-либо формулы F достаточно доказать невыполнимость ее отрицания $\bar{F}$, что в ряде случаев значительно проще. (В 60-х годах XX века был открыт и разработан так называемый принцип резолюций, весьма подходящий для доказательств подобного рода).

Метод опровержения реализует *принцип дедукции*, который формулируется следующим образом:

формула B является логическим следствием множества $\{H\}$ тогда и только тогда, когда множество $\{H, \bar{B}\}$ невыполнимо, т.е. $(H_1, H_2, \dots H_n) \sqcap B$, если $(H_1, H_2, \dots H_n, \bar{B}) \sqcap L$.

Докажем условие (5.9).

Исключим импликацию:

$$((H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_{n1}) \rightarrow B)$$

и по правилу де Моргана получим:

$$\overline{(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n)} \wedge \overline{B},$$

что эквивалентно выражению

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \wedge \overline{B}. \quad (5.10)$$

Дело, таким образом, сводится к доказательству невыполнимости

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \wedge \overline{B}) \sqcap L. \quad (5.11)$$

Формула (5.10) в своем виде уже является элементом КНФ, даже если все H_i - элементарные высказывания. Если же H_i - сложные выражения, то они приводимы к виду КНФ и их подстановка в (5.10) не меняет ее нормальной формы. Поэтому в дальнейшем мы вправе считать каждое из H_i дизъюнктом, состоящим из одного или многих "слагаемых".

Условие (5.11) требует, чтобы формула (5.10) была невыполнима, т.е. тождественно равна 0. Это возможно, если среди ее "сомножителей" найдется хотя бы один пустой дизъюнкт. Такой дизъюнкт не может появиться в явном виде. Но он может быть определен на множестве $\{H, \overline{B}\}$ путем определенных эквивалентных преобразований.

Из всего вышесказанного следует, что, согласно принципу дедукции, вопрос о выводимости (невыводимости) некоторой формулы B сводится, в конечном счете, к анализу невыполнимости множества дизъюнктов. Но множество дизъюнктов невыполнимо тогда и только тогда, когда пустой дизъюнкт L является логическим следствием из него. Таким образом, невыполнимость множества $\{H, \overline{B}\}$ можно проверить, порождая логические следствия из него до тех пор, пока не получится пустой дизъюнкт. Метод, позволяющий получить логические следствия из множества дизъюнктов, основан на применении принципа резолюций.

13. Принцип резолюций

B сущности, в основе принципа лежит несложная схема рассуждений. Пусть A , B и C - формулы и имеются два дизъюнкта:

$$1. (A + C) \text{ и } 2. (B + \overline{C}),$$

которые мы будем считать истинными. Положим теперь, что $C = I$.

Подставив это значение в первое выражение, получим дизъюнкт вида $A + I$, который истинен при любом A . Подставив $C = I$ во второе выражение, получим дизъюнкт $B + L$, из которого однозначно следует, что $B = I$, поскольку принято, что весь дизъюнкт истинен.

Положим теперь $C = L$. Второй дизъюнкт истинен при любом B , но первый принимает вид $A + L$, откуда следует, что $A = I$.

Все это означает, что, независимо от интерпретации формулы C , либо A , либо B истинны. Это можно отразить в виде нового дизъюнкта $(A + B)$, исключив *контрарные* формулы C и $\bar{C}$.

Другими словами, выполняется правило

$$(A + C, B + \bar{C}) \sqsupset (A + B). \quad (5.12)$$

Правило особенно эффективно, если A и B дизъюнкты, а C - высказывание. Это правило называется *правилом резолюции*, а вновь полученный дизъюнкт - *резольвентой*. Он формируется как "сумма" оставшихся формул, за исключением *контрарных*, т.е. разных по знаку.

Для дизъюнктов $(p + q + \bar{r})$ и $(m + r)$, например, резольвента будет иметь вид $(p + q + m)$. Для дизъюнктов $(p + r)$ и $(\bar{r})$ соответственно (p) , а вот в случае (p) и $(\bar{p})$ обе литеры "уничтожаются". Это пример получения *пустого* дизъюнкта. Еще один пример. Имеются два дизъюнкта $(\bar{x} + y)$ и $(x + \bar{y})$. Получаемые здесь резольвенты $(x + \bar{x})$ или $(y + \bar{y})$ равны 1, информации не несут, их следует отбрасывать.

В логическом плане каждый полученный дизъюнкт - резольвента равносителен обоим дизъюнктам-родителям, участвовавшим в резолюции, (они так и называются - родители). Он становится очередной гипотезой и участвует в резолюции на равных с другими. Это касается и пустого дизъюнкта, но будучи поставлен в ряд гипотез H_i , он делает формулу типа (5.10) равной 0, что и является ее доказательством.

Пример. Доказать невыполнимость множества дизъюнктов:

$H = (p + q, p + r, \bar{q} + \bar{r}, \bar{p})$. Пронумеруем гипотезы:

1. $p + q$,
2. $p + r$,
3. $\bar{q} + \bar{r}$,
4. $\bar{p}$.

Далее применяется правило резолюции. Полученные резольвенты присоединяются к исходному множеству, с ними снова можно проводить резолюции. Ниже следует список резольвент, в скобках указываются номера резольвент, участвовавших в резолюции.

5. q (1,4),
6. r (2,4),
7. $\bar{q}$ (3,6),
8. L (5,7).

Надо отметить, что выбранный путь порождения резольвент может быть не единственным. Например, в нашем случае, результат можно было получить чуть быстрее, если пойти по следующему пути:

5. $p + \bar{r}$ (1,3),

6. p (2,5),

7. L (4,6).

Как видно из примера, метод резолюций легко представим в виде несложного регулярного алгоритма. Это предопределяет успешное применение ЭВМ в решении задач вывода, хотя здесь и возможны неожиданные трудности. Дело в том, что машина ищет резолюцию слепо, методом перебора. При таком поиске путь к результату может быть весьма долгим. Возможны случаи простого заикливания машины. Простейший пример: имеется два дизъюнкта p и $\bar{p} + q$. При машинной реализации резольвента q может порождаться неограниченное число раз. Предусматривая подобные случаи, применяют специальные стратегии поиска резольвент и соответствующее программирование. Некоторые такие стратегии мы рассмотрим в следующем разделе.

В заключение отметим такое важное обстоятельство:

множество резольвент (вместе с родительскими дизъюнктами) образует не что иное как математическую модель некоторой предметной области. Каждая новая резольвента добавляет новое состояние в пространство состояний Mno , а поиск решения в пространстве состояний представлен операцией логического вывода.

14. Свойства метода резолюций

Несмотря на известные недостатки, заключающиеся главным образом в возможности неограниченного порождения резольвент и в отсутствии, тем самым, гарантий быстрого поиска решения, метод резолюций является одним из самых мощных инструментов в решении задач логического вывода. Он обладает двумя существенными достоинствами: он логичен, т.к. резольвенты являются логическими следствиями предложений-родителей, и он обладает полнотой, т.к. при использовании в процессе вывода результат получается за счет применения только одного и того же правила. Представляет интерес свойство *завершаемости* метода резолюций: если множество $\{H\}$ невыполнимо, то пустой дизъюнкт может быть найден посредством резолюций. Это и понятно: пустой дизъюнкт есть резольвента множества $\{H\}$ и, будучи невыполнимым,

не может быть следствием выполнимого множества. По этому поводу даже есть лемма:

если множество $\{H\}$ невыполнимо и содержит резольвенты своих элементов, то оно обязательно содержит пустой дизъюнкт.

Метод резолюций применяется не только в рамках исчисления высказываний и исчисления предикатов (см. последующие главы), к нему нередко сводится процедура вывода в некоторых других моделях представления знаний (продукционные ПЗ, семантические сети, фреймы). Широко известный язык программирования ПРОЛОГ специально создан для реализации процедур, основанных на методе резолюций. Что же касается указанных недостатков, то в значительной степени они уменьшаются или даже исключаются путем применения специальной стратегии целенаправленного поиска резольвент. Ниже мы коснемся этого подробнее.

Основное назначение метода резолюций - порождение логических следствий из системы гипотез $\{H\}$ (причем эта система должна быть представлена в конъюнктивной нормальной форме). Это может быть порождение с целью общего обзора следствий, или же это будет поиск пустого дизъюнкта при реализации принципа дедукции - меняется только цель. Резольвента есть логическое следствие своих родителей. Обратного утверждать нельзя!

Рассмотрим показательный пример. Обратимся все к тому же свойству транзитивности импликации: если $(a \rightarrow b)$ и $(b \rightarrow c)$, то $(a \rightarrow c)$. Иначе: $[(a \rightarrow b)(b \rightarrow c)] \vdash (a \rightarrow c)$. Гипотезы в нашем примере: $H_1: (a \rightarrow b)$ и $H_2: (b \rightarrow c)$, формула $B: (a \rightarrow c)$. Согласно принципу дедукции, условие выполняется, если показано, что $(H_1, H_2, \overline{B}) \vdash \perp$. Переходя к КНФ, получаем выражение $[(\overline{a} + b)(\overline{b} + c)(\overline{a} + c)] \vdash \perp$. Задача, таким образом, сводится к знакомой формулировке: доказать невыполнимость множества дизъюнктов: $(\overline{a} + b)$, $(\overline{b} + c)$, a , $\overline{c}$. (т.к. $(\overline{a} + c) = a \wedge \overline{c}$ - это два однолитерных дизъюнкта a и $\overline{c}$).

Дизъюнкты:

1. $\overline{a} + b$,
2. $\overline{b} + c$,
3. a ,
4. $\overline{c}$

Резольвенты:

5. b (1,3),
6. c (2,5),
7. $\perp$ (4,6).

Транзитивность доказана, и "по логике" это легко понять: если из a следует b , а из b следует c , то очевидно, что из a следует c . Интересно, будет ли логическим следствием из указанных

дизъюнктов какой-либо другой из них? Например, $\bar{b} + c$. То есть требуется доказать:

$$[(a \rightarrow b)(a \rightarrow c)] \vdash (b \rightarrow c).$$

Переходя к КНФ, имеем дизъюнкты: $(\bar{a} + b)$, $(\bar{a} + c)$, $(\bar{b} + c)$ или иначе $(\bar{a} + b)$, $(\bar{a} + c)$, b , $\bar{c}$.

Итак, дизъюнкты:

1. $\bar{a} + b$,
2. $\bar{a} + c$,
3. b ,
4. $\bar{c}$.

Резольвенты:

5. $\bar{a}$. (2,4)

Других резольвент нет.

Импликация $(b \rightarrow c)$ не является логическим следствием.

Оно и правда: из того, что b и c следуют из a вовсе не следует, что c следует из b .

Из примера выводим:

если резольвента V_i есть логическое следствие из $\{H\}$, то совсем не обязательно, чтобы хотя бы для одной гипотезы H_k выполнялось условие

$$(H_1, H_2, \dots, H_n, V_i) \vdash H_k.$$

Разберем еще несколько примеров.

Пример 1. Пусть даны посылки p и $p \rightarrow q$. Определить все возможные следствия из этой пары. Систематический обзор логических следствий удобно осуществлять путем обращения к *совершенной* конъюнктивной нормальной форме (СКНФ). Напомним, что особенность СКНФ заключается в том, что все ее конъюнктивные члены содержат все переменные данной формулы и, следовательно, имеют одинаковое число литер. Если какой-либо член СКНФ содержит меньшее число переменных, то недостающие переменные вводятся прибавлением формулы типа $a \wedge \bar{a}$, которая равна 0 и на дизъюнкцию не влияет. Затем эту конъюнкцию раскрывают по дизъюнкции. Все это мы сейчас сделаем на примере.

Как и прежде, образуем конъюнкцию $p(p \rightarrow q)$ и приводим ее к СКНФ. Освобождаемся от импликации: $p(\bar{p} + q)$. В дизъюнкте p не хватает члена q . Прибавляем конъюнкцию $\bar{q} \wedge q$:

$(p + (\bar{q} \wedge q))(\bar{p} + q)$. Раскрывая эту конъюнкцию, получаем СКНФ:

$(p + q) \wedge (p + \bar{q}) \wedge (\bar{p} + q)$. Полученная СКНФ дает нам не только три конъюнктивных члена: $(p + q)$, $(p + \bar{q})$ и $(\bar{p} + q)$, каждый из которых является логическим следствием, но и возможность получать другие следствия в виде конъюнкции любой пары из них:

$$(\bar{p} + q) \wedge (p + \bar{q}), (p + q) \wedge (\bar{p} + q), (p + q) \wedge (p + \bar{q}).$$

Но и это еще не все следствия. Применяя метод резолюций, получаем дополнительно дизъюнкты: p и q (Проверить самостоятельно).

Пример 2. Институт заключает договор, в котором предположительно могут участвовать три кафедры A , M и R . Однако участие этих кафедр обуславливается рядом обстоятельств. А именно:

- а) если M не участвует в договоре, то не участвует и A ;
- б) если же M участвует, то участвуют и A , и R .

Но вот вопрос: обязана ли R участвовать в договоре, если в нем уже участвует A ?

Опишем задачу в терминах исчисления высказываний. Обозначим: a – в договоре участвует A , m – в договоре участвует M , и r – в договоре участвует R . Тогда условию а) соответствует формула $\bar{m} \rightarrow \bar{a}$, условию б): $m \rightarrow (a \wedge r)$. Необходимо решить, следует ли из этих условий $a \rightarrow r$?

Требуется вывести логическое следствие:

$$((\bar{m} \rightarrow \bar{a}), (m \rightarrow (a \wedge r))) \vdash (a \rightarrow r).$$

Исключаем импликации и делаем небольшие преобразования:

$$[(m + \bar{a}), (\bar{m} + ar)] \vdash (\bar{a} + r),$$

$$[(m + \bar{a}), ((\bar{m} + a)(\bar{m} + r))] \vdash (\bar{a} + r),$$

$$[(m + \bar{a}), (\bar{m} + a), (\bar{m} + r)] \vdash (\bar{a} + r),$$

Согласно принципу дедукции, требуется доказать условие:

$$[(m + \bar{a}), (\bar{m} + a), (\bar{m} + r), (\bar{a} + r)] \vdash \perp.$$

Применяя метод резолюции, анализируем:

дизъюнкты:

резолюции:

$$1. m + \bar{a},$$

$$6. m, (1,4)$$

$$2. \bar{m} + a,$$

$$7. r, (3,6)$$

$$3. \bar{m} + r,$$

$$8. \perp. (5,7)$$

$$4. a,$$

Кафедра R обязана участвовать

$$5. \bar{r}.$$

в договоре, если участвует A .

15. Пример решения задачи средствами ИВ

Обратимся к известной уже нам задаче про обезьяну и бананы (п. 1.5). На основе фактов БД и правил БЗ построим формальную модель предметной области на языке исчисления высказываний и проиллюстрируем на ней механизм логического вывода.

Сначала для этого необходимо определить алфавит, т.е. набор символов, обозначающих высказывания, которые мы определим, например, следующим образом:

A – "Обезьяна находится в точке a ",

B – "Ящик находится в т. b ",

C – "Бананы находятся в т. c ",

D – "Обезьяна находится на Ящике",

E – "Обезьяна держит Бананы",

F – "Обезьяна, Ящик, Бананы находятся в разных точках",

G – "Обезьяна находится рядом с ящиком".

Используя логические связки: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$, мы можем строить более сложные умозаключения. Например:

1). $(A \wedge B \wedge C) \rightarrow F$.

(Если все предметы находятся на своих исходных позициях, т.е. в точках a , b , c соответственно, то справедливо сказать: "Обезьяна, Ящик, Бананы находятся в разных точках").

2). $F \rightarrow \neg G$.

(Если "Обезьяна, Ящик, Бананы находятся в разных точках", то "Обезьяна находится не рядом с Ящиком").

3). $F \rightarrow \neg D$.

(Если "Обезьяна, Ящик, Бананы находятся в разных точках", то "Обезьяна не находится на Ящике").

4). $F \rightarrow \neg E$.

(Если "Обезьяна, Ящик, Бананы находятся в разных точках", то "Обезьяна не держит Бананы").

Высказывания 2, 3, 4 можно объединить в одно с помощью логической связки "И":

5). $F \rightarrow (\neg G \wedge \neg D \wedge \neg E)$.

6). $\neg F \rightarrow (D \wedge E)$.

(Если "Обезьяна, Ящик и Бананы находятся не в разных точках", (т.е. в одной), то "Обезьяна стоит на Ящике" **И** "Обезьяна держит Бананы").

7). $\neg D \rightarrow \neg E$.

(Если "Обезьяна не на Ящике", то "Обезьяна не держит Бананы").

Таким образом, фрагмент предметной области на языке исчисления высказываний (ИВ) представляет собой следующий набор формул (БЗ):

1. $(A \wedge B \wedge C) \rightarrow F$;

2. $F \rightarrow (\neg G \wedge \neg D \wedge \neg E)$; (5.13)

$$3. \neg F \rightarrow (D \wedge E);$$

$$4. \neg D \rightarrow \neg E.$$

Для простоты введем обозначение $S = A \wedge B \wedge C$.

Теперь, используя *механизм логического вывода* ИВ, мы можем доказать выводимость любой другой формулы, структура которой соответствует синтаксису ИВ (в рамках данной модели). Докажем, например, что формула

$$(\neg S \wedge D) \rightarrow E \quad (5.14)$$

выводима. Ее смысл: если "Обезьяна, Ящик и Бананы не в исходных точках" *И* "Обезьяна на Ящике", то "Бананы в руках у Обезьяны".

Логический вывод можно сделать несколькими способами.

1). Можно, например, использовать *таблицу истинности*, которая дает исчерпывающую картину значений переменных. При этом формулы (5.13) и (5.14) образуют выражение логического вывода в виде:

$$\begin{aligned} & ((A \wedge B \wedge C) \rightarrow F) \wedge (F \rightarrow (\neg G \wedge \neg D \wedge \neg E)) \wedge (\neg F \rightarrow (D \wedge E)) \wedge (\neg D \rightarrow \neg E)) \sqcap \\ & ((\neg S \wedge D) \rightarrow E). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Далее следует вычислить значения выражений слева и справа от знака $\sqcap$. Если окажется, что формула справа принимает значение *И* как только все формулы (5.13), образующие левую часть, одновременно примут значение *И*, то логическая выводимость (5.14) из (5.13) доказана.

Учтем, однако, следующее. Формула (5.15) имеет 7 переменных. Это значит, что таблица будет содержать 2^7 , т.е. 128 строк! Есть ведь и другие методы.

2). Можно попытаться использовать метод вывода, основанный на *системе аксиом исчисления высказываний*. Но это тоже очень трудоемкий процесс.

3). Лучше всего попробовать метод опровержения, основанный на *принципе дедукции* и реализуемый посредством *резолуций*. Согласно этому методу следует доказать противоречивость системы

$$1). S \rightarrow F;$$

$$2). F \rightarrow (\neg G \wedge \neg D \wedge \neg E); \quad (5.16)$$

$$3). \neg F \rightarrow (D \wedge E);$$

$$4). \neg D \rightarrow \neg E;$$

$$5). \overline{(\neg S \wedge D) \rightarrow E},$$

где под номером 5 как раз и стоит отрицание формулы (5.14). Далее применяем метод резолуций. Для начала все пять предложений

следует представить в виде конъюнкции элементарных дизъюнктов (КНФ). Для простоты дизъюнкцию будем обозначать "+".

Для первого предложения имеем: 1'. $\overline{S}+F$.

Для второго: 2'. $\overline{F}+(\overline{G} \wedge \overline{D} \wedge \overline{E})$.

Для третьего: 3'. $F+(D \wedge E)$.

Для четвертого: 4'. $D+\overline{E}$.

Для пятого приведем цепочку преобразований:

$$5'. (\overline{S} \wedge D) \rightarrow E = \overline{(\overline{S} \wedge D) + E} = \overline{(\overline{S} + \overline{D}) + E} = \overline{S} \wedge D \wedge \overline{E}.$$

Пользуясь правилом раскрытия конъюнкции по дизъюнкции, имеем для 2': $(\overline{F} + \overline{G}) \wedge (\overline{F} + \overline{D}) \wedge (\overline{F} + \overline{E})$;

для 3': $(F+D) \wedge (F+E)$.

Конъюнкция 5' распадается на три одночленных дизъюнкта: $\overline{S}$, D , $\overline{E}$.

Теперь у нас имеется система элементарных дизъюнктов, на основе которой проводим вывод методом резолюции.

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------|
| 1. $\overline{S}+F$. | Резольвенты |
| 2. $\overline{F} + \overline{G}$. | 10. F (6, 9). |
| 3. $\overline{F} + \overline{D}$. | 11. $\overline{D}$ (3, 10). |
| 4. $\overline{F} + \overline{E}$. | 12. "Л" (8, 11). |
| 5. $F+D$. | Мы получили "пустой" (ложный) |
| 6. $F+E$. | |

дизъюнкт. Это
значит, что
выводимость

- | | |
|---------------------|--------------------------------------|
| 7. S . | формулы (2) из системы (1) доказана, |
| 8. D . | т. е. утверждение (2) истинно. |
| 9. $\overline{E}$. | |

Отметим, что приведенная резолюция не единственно возможная. Можно и по-другому. Например:

- | | | |
|---------------------|-----------|--------|
| 10'. $\overline{F}$ | (3, 8). | |
| 11'. E | (6, 10'). | |
| 12'. "Л" | (9, 11'). | И т.п. |

Упражнения.

1. Пользуясь таблицей истинности, показать равносильность следующих формул:

а. $\bar{b} \wedge (b \rightarrow a)$ и $b \rightarrow (\bar{b} \wedge a)$;

б. $\bar{r} \rightarrow \bar{q}$ и $q \rightarrow r$;

в. $(q + \bar{p} \bar{q})$ и $((p + \bar{q})(\bar{p} + q))$;

г. $(p + q + r)$ и $(\overline{(a + b)} \rightarrow c)$;

д. $(a \rightarrow b)$ и $(\overline{(q \wedge \bar{p})})$.

2. Путем простейших преобразований доказать тождества:

а. $((p \rightarrow q) \wedge \bar{q}) \rightarrow \bar{p}$;

б. $(\bar{p} \rightarrow \bar{q}) \rightarrow (q \rightarrow p)$;

в. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$;

г. $(\bar{a} \vee b) \equiv (a \rightarrow b)$;

д. $(a \rightarrow \bar{b}) \equiv (\bar{a} \vee \bar{b})$.

3. Доказать, что формула $f = (a \wedge b) \rightarrow a$ тождественна и что подстановка $a = (c \rightarrow d)$ не меняет истинности.

3а. Те же условия для $f = a \rightarrow (a \vee b)$ и $a = c \rightarrow (a + b)$.

3б. Те же условия для $f = a \rightarrow (d \rightarrow a)$ и $a = \bar{a} \vee d$

3в. Доказать, что постулат А3 (п.5.5) не меняет тождественности при подстановке $B \rightarrow A$ вместо B .

3г. То же для постулата А1 (п.5.5) при подстановке $(a + b) \rightarrow r$ вместо A .

4. Привести к конъюнктивной нормальной форме.

а. $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow q)$;

б. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((\bar{p} \rightarrow q) \rightarrow p)$;

в. $(x(y \rightarrow z)) \rightarrow w$;

г. $(\bar{q} \rightarrow p)(\bar{q} \rightarrow \bar{p}) + (p \rightarrow r)$;

д. $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow r)$;

е. $(\bar{a} \rightarrow b)(c \rightarrow d) + (a \rightarrow b)$;

ж. $((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)) + r$;

з. $(\bar{b}(a \rightarrow c)) \rightarrow \bar{a}$;

и. $(p \rightarrow q)(\bar{r} \rightarrow p)(\bar{q} \rightarrow r) + p$;

к. $(a(b \rightarrow d)) \rightarrow c$.

5. Доказать тождества методом редукции.

а. $(\bar{p} \rightarrow \bar{q}) \rightarrow (q \rightarrow p)$;

б. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$;

в. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((\bar{p} \rightarrow q) \rightarrow q)$;

г. Постулат А3 (п.5.5);

д. $(r \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow ((rp) \rightarrow q))$;

е. $A \rightarrow (b \rightarrow (a + b))$.

6. Принцип дедукции.

Методом опровержения доказать следующие тождества:

- а. $(\overline{A} \vee C) \rightarrow ((\overline{B} \vee C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C));$
- б. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C));$
- в. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (C \vee D)));$
- г. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \overline{B}) \rightarrow \overline{A});$
- д. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow ((\overline{C} \vee \overline{D}) \rightarrow (\overline{A} \vee \overline{B})));$
- е. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((\overline{A} \rightarrow B) \rightarrow B);$
- ж. $(\overline{A} \wedge \overline{B}) \rightarrow ((\overline{A} \rightarrow C) \rightarrow ((\overline{B} \rightarrow C) \rightarrow C));$
- з. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)).$

7. Пользуясь методом резолюций, доказать следствия:

- а. $((a + b), (\overline{a} + c), (\overline{b} + d)) \vdash (c + d);$
- б. $((a \rightarrow b), (a \rightarrow c), (\overline{b} + \overline{c})) \vdash (\overline{a});$
- в. $((a \rightarrow c), (b \rightarrow d), (\overline{c} + \overline{d})) \vdash (\overline{a} + \overline{b});$
- г. $((p \rightarrow q)(q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r);$
- д. $(a(a \rightarrow (b + c))(b \rightarrow d)(c \rightarrow d)) \rightarrow d,$
- е. $((\overline{a} \rightarrow \overline{b}) \rightarrow \overline{(a \rightarrow c)}) \rightarrow (\overline{a} + \overline{b}).$

8. Записать в виде формул ИВ следующие выражения:

- а. Пришел, увидел, победил.
- б. Порох состоит из смеси угля, серы и нитрата калия.
- в. Волхвы не боятся могучих владык, и княжеский дар им не нужен.
- г. Смесь метана и воздуха взрывоопасна.
- д. А если надо простой квас медвяный сытить, то взять меду патоки вчетверо да процедить через сито начисто, да положить в сосуд и заквасить простым калачом свежим, и лишь закиснет – сливать в бочки.
- е. Если руки мыли вы,
если руки мыли мы,
если руки вымыл ты, –
значит, руки вымыты.
- ж. Зайку бросила хозяйка,
Под дождем остался зайка,
Со скамейки слезть не мог,
Весь до ниточки промок.