Введение в теорию графов и динамическое программирование

СиАОД лектор Лобанов А.А.
к.т.н., доц. каф. ИППО

Теория графов

- **Теория графов** —один из фундаментальных разделов дискретной математики. Родоначальником теории графов считается Леонард Эйлер. В 1736 году в одном из своих писем он формулирует и предлагает решение задачи о семи кёнигсбергских мостах, ставшей впоследствии одной из классических задач теории графов.

Применение

Теория графов находит применение, например, в транспортных задачах. Склады можно рассматривать как вершины, а соединяющие их дороги — как рёбра. Применение различных вычислений, производимых на таком графе, позволяет, например, найти кратчайший объездной путь или ближайший магазин, спланировать оптимальный маршрут.

Применение

- Графы оказались очень продуктивным средством информационного (математического) моделирования структур систем и процессов, представления задач информационного характера.
- Именно при исследовании информационных систем графы пользуются очень большой популярностью.

Термины и определения

- Теория графов содержит большое количество нерешённых проблем и пока не доказанных гипотез.
- Терминология теории графов не определена строго. «В программистском мире нет единого мнения о том, какой из двух терминов „граф“ или „сеть“. Схожим образом используются два понятия «вершина/точка».

Граф

- В общем смысле граф представляется как множество вершин (узлов), соединённых рёбрами. В строгом определении графом называется такая пара множеств. G=(V,E).
- Где V есть подмножество любого счётного множества, а E — подмножество V × V.

Еще раз)

Графом G(V, E) называется совокупность двух множеств — непустого множества V (множества вершин) и множества E двухэлементных подмножеств множества V (E — множество рёбер). Связи между элементами изображаются на графе линиями. Если линия направленная, то она называется *дугой*. Если нет, то это *ребро*.

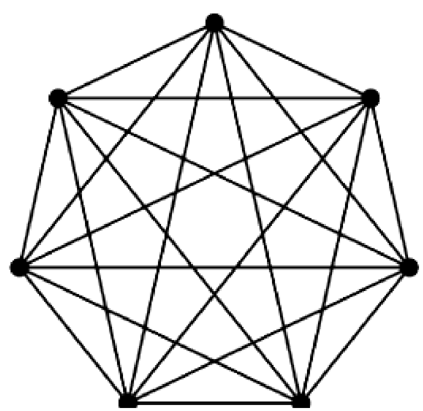
Последовательность $v_1e_1v_2e_2v_3...e_kv_{k+1}$, (где $k \geq 1$, $v_i \in V$, $i=1,...,k+1$, $e_i \in X$, $j=1, ..., k$), в которой чередуются вершины и рёбра (дуги) и для каждого $j=1,...,k$ ребро (дуга) e_j имеет вид $\{v_j, v_{j+1}\}$ (для ориентированного графа (v_j, v_{j+1})), называется ***маршрутом***, соединяющим вершины v_1 и v_{k+1} (*путём* из v_1 в v_{k+1}).

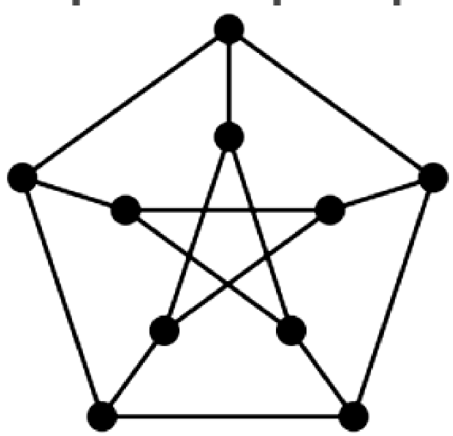
Определение простого графа

Простым графом G называется пара множеств (V,E), где

- V – не пустое, конечное множество элементов, называемых **вершинами**. Графически это множество изображается точками.
- E – конечное множество неупорядоченных пар различных элементов из V, называемых **ребрами.** Графически это множество изображается линией, соединяющей пару точек.

Простой граф – конечный граф без петель и кратных ребер.



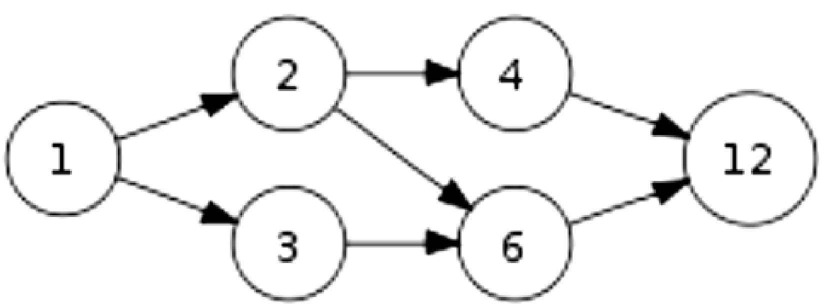


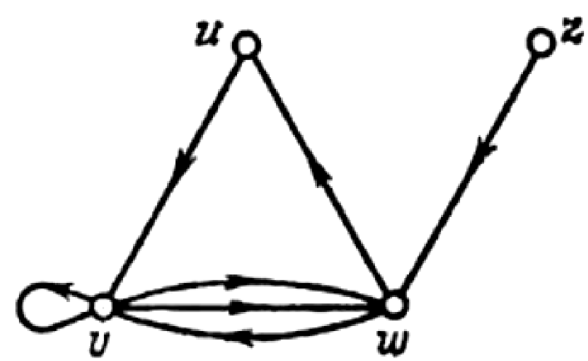
Ориентированный граф

Ориентированным графом (орграфом) G называется пара (V,E), где

- V – не пустое, конечное множество элементов (вершин).
- E – конечное семейство <u>упорядоченных</u> пар элементов из V, называемых дугами.

Замечание. В семействе допускаются одинаковые элементы.

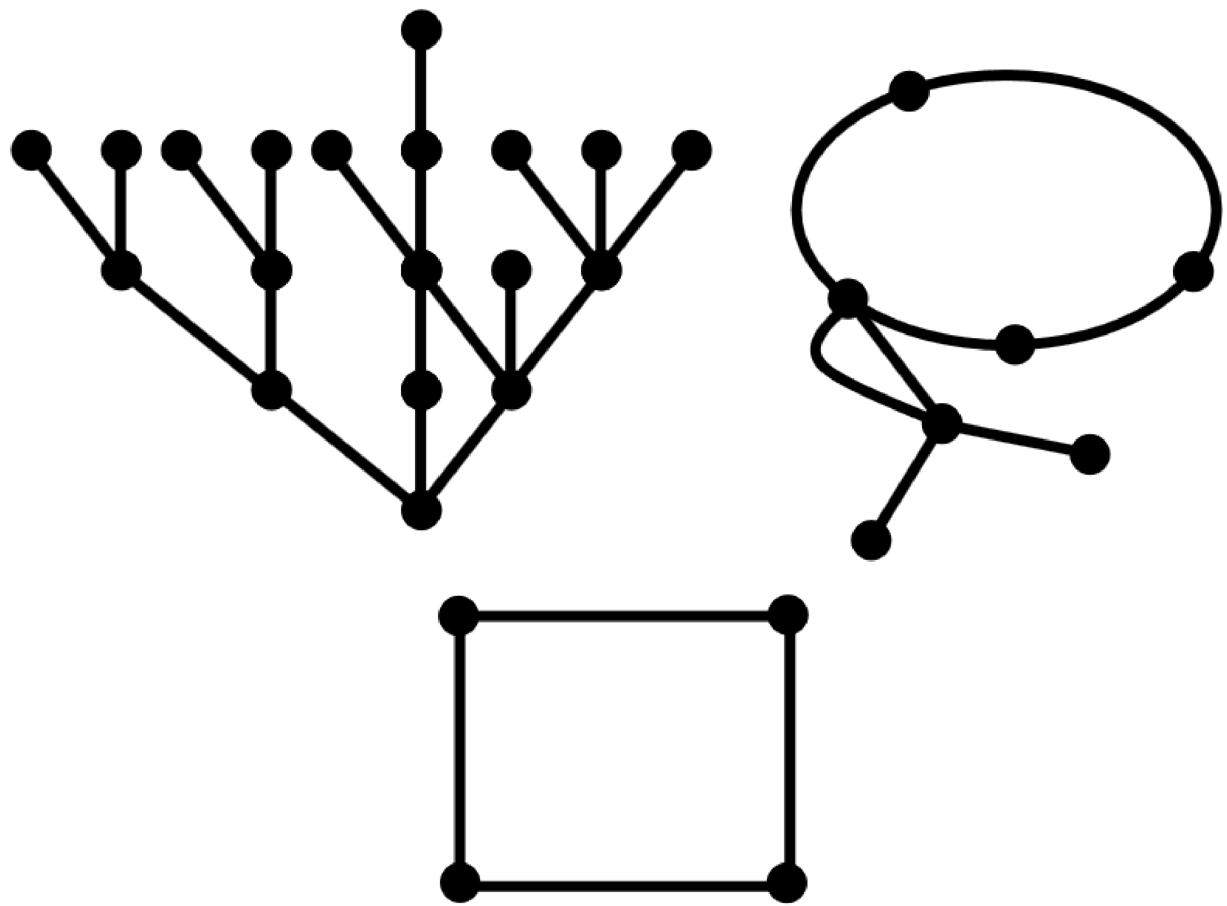




Основные понятия графа

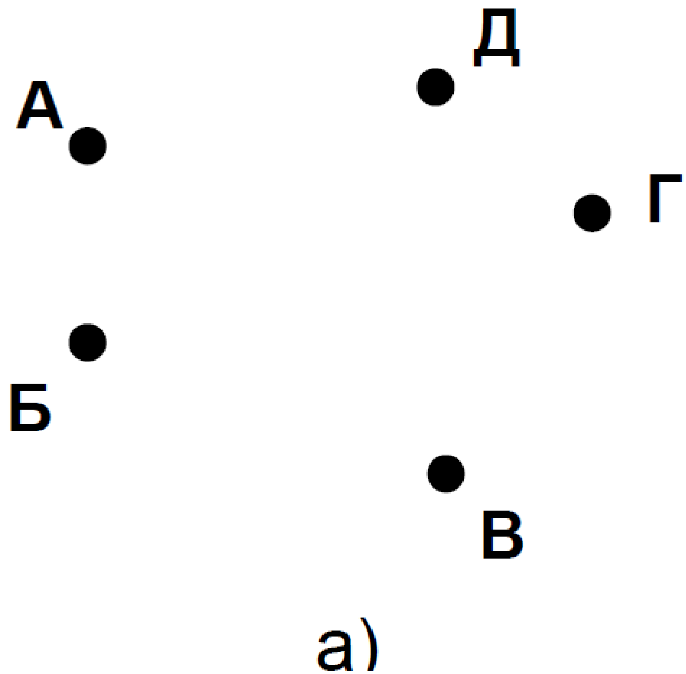
- **Смежными вершинами** называю две вершины графа, соединенные ребром.
- **Инцидентными** ребру вершинами, называются вершины, соединяемые ребром.
- Два ребра, инцидентные одной вершине, называются **смежными ребрами**.
- **Степень вершины -** количество инцидентных ей ребер.
- Вершина степени 0 называется изолированной, степени 1 – висячей.
- Сумма степеней всех вершин простого графа равна удвоенному числу ребер.
- В простом графе число вершин нечетной степени четно.

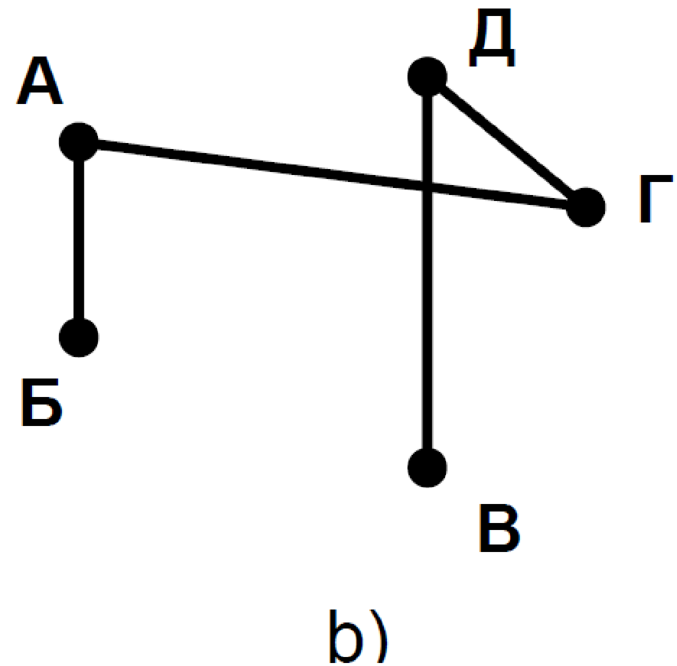
Виды графов



Задача для графов

- Пусть встретились 5 человек и каждый пожал другому руку. Тогда сколько всего было сделано рукопожатий?
- Пусть каждому человеку соответствует определенная точка на плоскости (А, Б,…, Д), изображено на рис. а), а рукопожатия изображаются ребрами (рис. б)

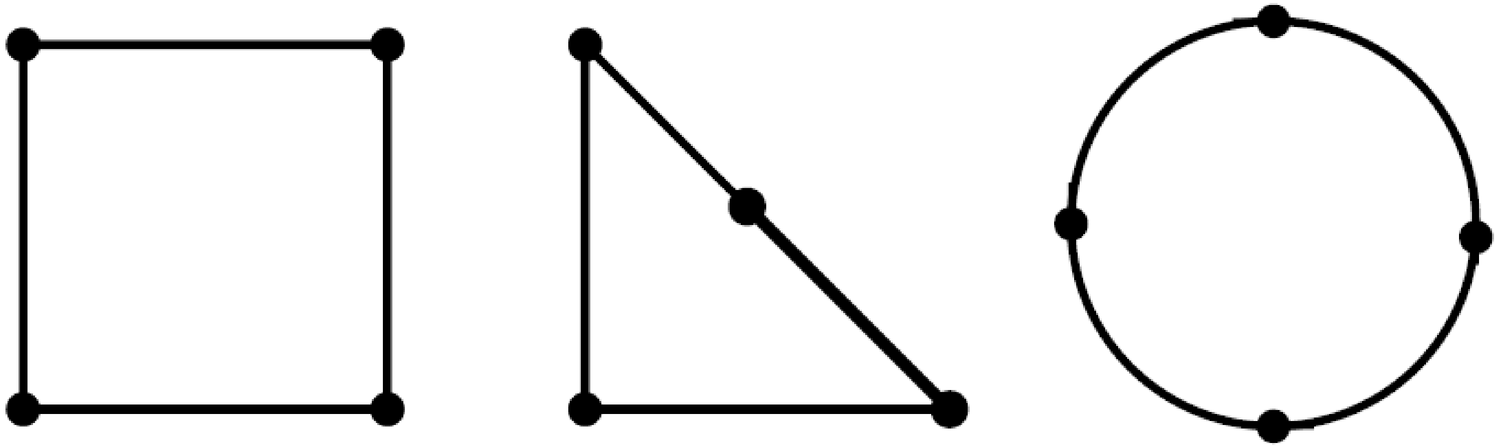




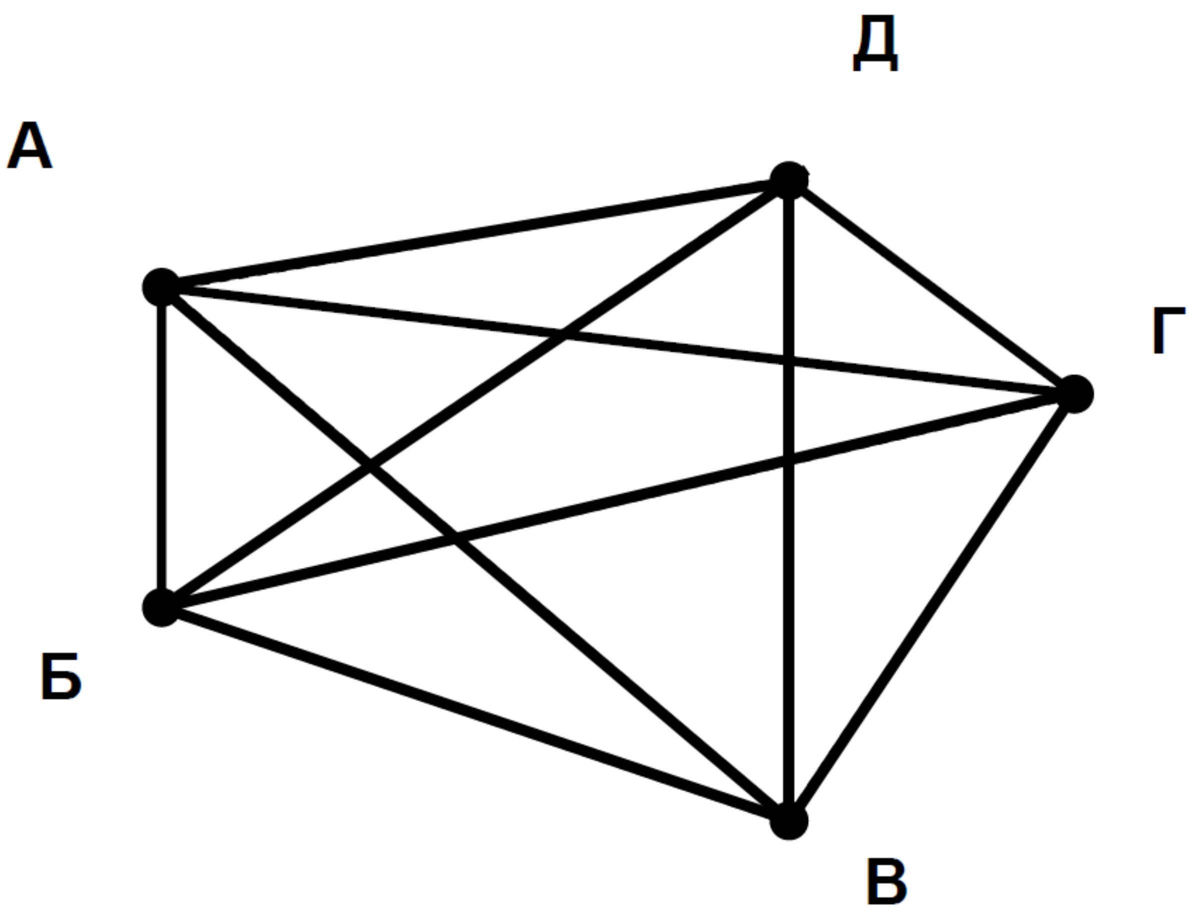
а) нулевой граф с 5 вершинами
б)неполный граф с 5 вершинами

Изображения графа

- Заметим, что при изображении графов на рисунках или схемах отрезки могут быть прямолинейными или криволинейными, а длины отрезков и расположение точек произвольны. На приведенном рисунке изображен один и тот же граф.



Полный граф



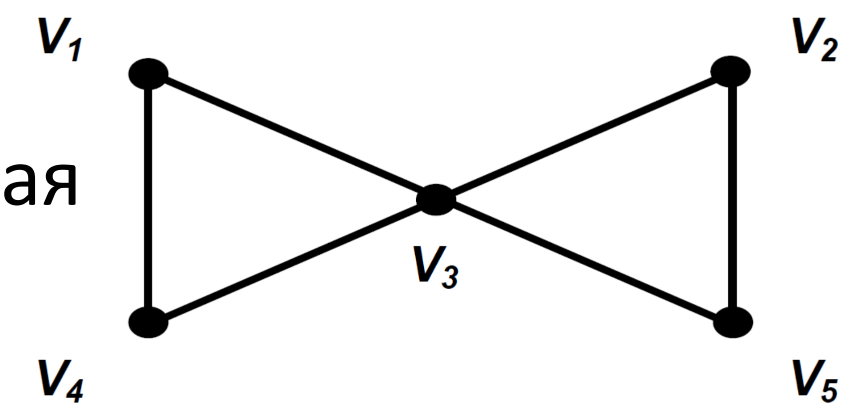
Число рукопожатий

- Если подсчитать число рёбер графа, изображенного на рисунке, то это число и будет равно количеству совершённых рукопожатий между пятью людьми. Их 10.
- Запомним, что если полный граф имеет n вершин, то количество рёбер будет равно n(n-1)/2.
- Количество рёбер в полном графе с n вершинами определяется как число неупорядоченных пар, составленных из всех n точек - рёбер графа, т.е. как число сочетаний из n элементов по 2.

Маршрут графа

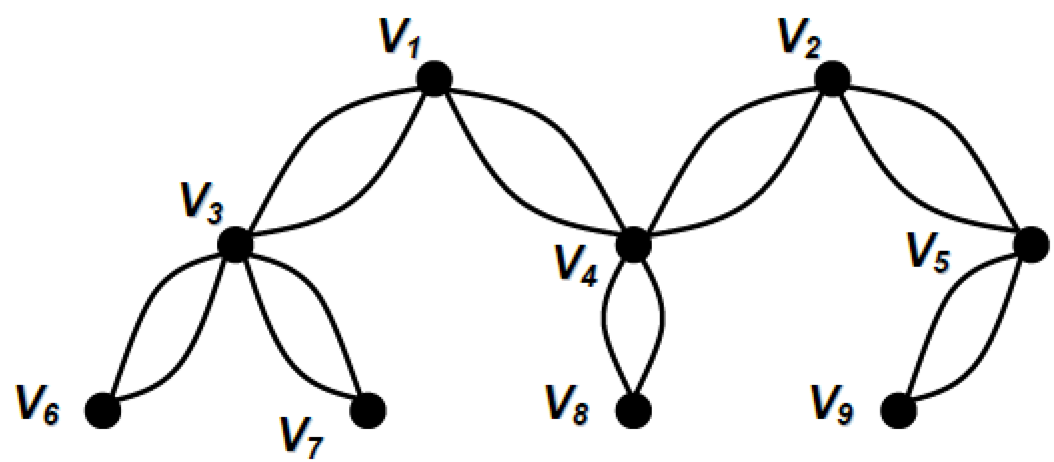
это чередующаяся последовательность вершин и рёбер называется маршрутом графа. Такая последовательность начинается и кончается вершиной, в которой каждое ребро инцидентно двум вершинам. В графах можно выделить различные маршруты,

Например – замкнутый когда совпадают начальная и конечная вершина



- Маршрут называется простой цепью, если все его вершины и рёбра различны (см. рисунок). Одна вершина достижима из другой, если между ними проложен маршрут. Граф считается связным, если каждая его вершина достижима из любой другой (см. рисунок). В графе, диаграмма которого приведена на рисунке: v1, v3, v1, v4 — маршрут, но не цепь; v1, v3, v5, v2, v3, v4 — цепь, но не простая цепь; v1, v4, v3, v2, v5 — простая цепь (незамкнутый маршрут) в котором ни одна дуга/ребро не встречается дважды; v1, v3, v5, v2, v3, v4, v1 — цикл, но не простой цикл; v1, v3, v4, v1 — простой цикл (замкнутая цепь).

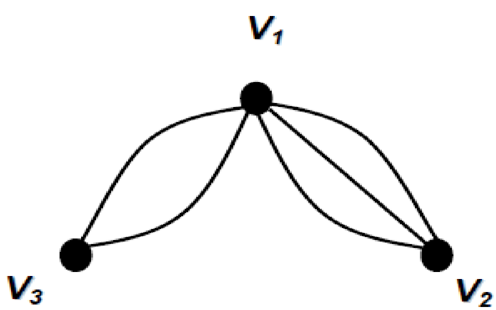
Цепь



Ориентированный, неориентированный и смешанный графы

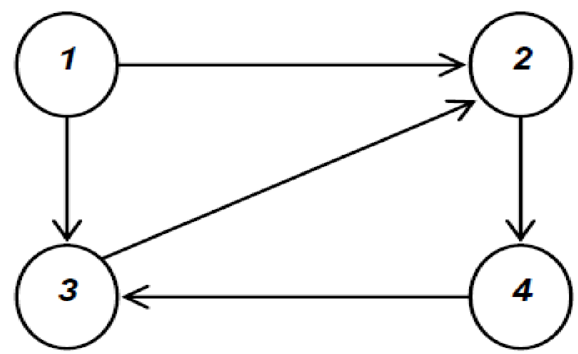
Граф задаётся множеством *V* мультимножеством *E,* элементами которого являются пары элементов множества *V.* Обычно граф записывают в виде *G(V, E).* Элементы множества *V* часто называют вершинами. Пусть граф имеет *n* вершин, например $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Общеприняты следующие соглашения. Если пары (v_i и v_j) и (v_j и v_i) не различают при любых *i* и *j,* то граф называют ***неориентированным,*** а элемент мультимножества *E* — ребром. Если пары (v_i и v_j) и (v_j и v_i) различают при любых *i* и *j*, то граф называют ***ориентированным,*** а элемент мультимножества *E — дугой.* В остальных случаях граф называют ***смешанным.***

- Граф, в котором E является мультимножеством (существуют две вершины, которые соединены более чем одним ребром или дугой), называется ***мультиграфом***



Мультиграф

Дуга орграфа



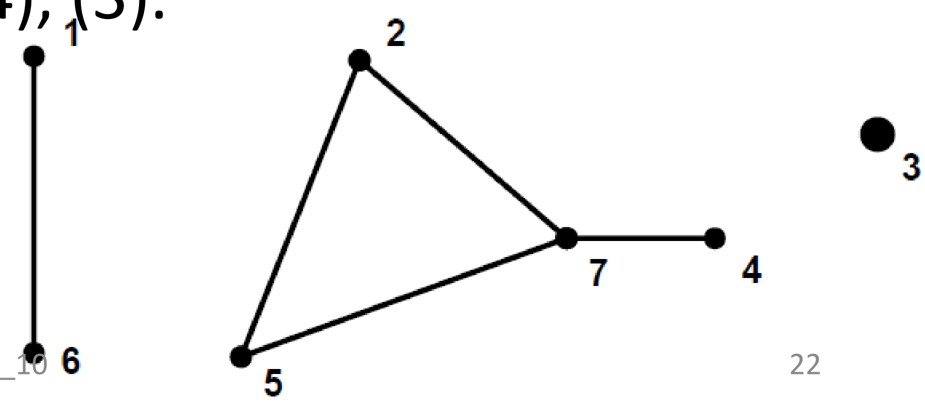
Ориентированный граф

Ориентированный граф

- (или сокращённо орграф) — граф, в котором связи изображены дугами. Дуга представима в виде упорядоченной пары вершин (*v, w*), где вершина *v* называется началом, а *w* — концом дуги. Дугу (*v, w*) часто записывают как $v \cap w$ и изображают в виде представленном на рисунке 9.
- Говорят также, что дуга $v \cap w$ ведёт от вершины *v* к вершине *w*, а вершина *w* ***смежная*** с вершиной *v*. На рисунке показан орграф с четырьмя вершинами и пятью дугами.

Цикл

- ***Цикл*** — это замкнутая цепь в неориентированном графе v_1, e_1, v_2, e_2,..., v_t, e_t, v_1 , в которой все вершины различны, длинной не менее 1, которая начинается и заканчивается в одной и той же вершине.
- Неориентированный граф *G* называется ***связным***, если каждая пара вершин v_i и v_j в графе связана цепью. Любой максимальный связный подграф (то есть не содержащийся в других связных подграфах) графа *G* называется ***компонентой связности***. Несвязный граф имеет, по крайней мере, две компоненты связности.
- Граф на рисунке распадается на три компоненты связности: (1, 6), (2, 7, 5, 4), (3).



Цепи

- Если граф имеет простой цикл, содержащий все вершины графа (по одному разу), то такой цикл называется гамильтоновым циклом. ***Гамильтонова цепь*** (*путь, цикл, контур*) — простая цепь (путь, цикл, контур), проходящая через все вершины.
- Если граф имеет цикл (не обязательно простой), содержащий все рёбра графа по одному разу, то такой цикл называется Эйлеровым циклом. ***Эйлерова цепь*** (*путь, цикл, контур*) — цепь (путь, цикл, контур), содержащая все рёбра (дуги) графа по одному разу.

Способы задания графов

1. Перечисление вершин и ребер.
2. Графическое изображение.
3. С помощью матриц смежности вершин.

	V_1	V_2	…	V_n
V_1	Кол-во ребер, соединяющих эти вершины			
V_2				
…				
V_n				

4. С помощью матриц инциденции.

	E_1	E_2	…	E_n
V_1	1, если вершина инцидентна ребру			
V_2				
…				
V_n				

Свойства матрицы смежности простого графа

- Число единиц в i-строке равно степени i-вершины
- Число единиц в j-столбце равно степени j-вершины
- Общее число единиц равно удвоенному числу ребер
- Матрица симметрична относительно главной диагонали.

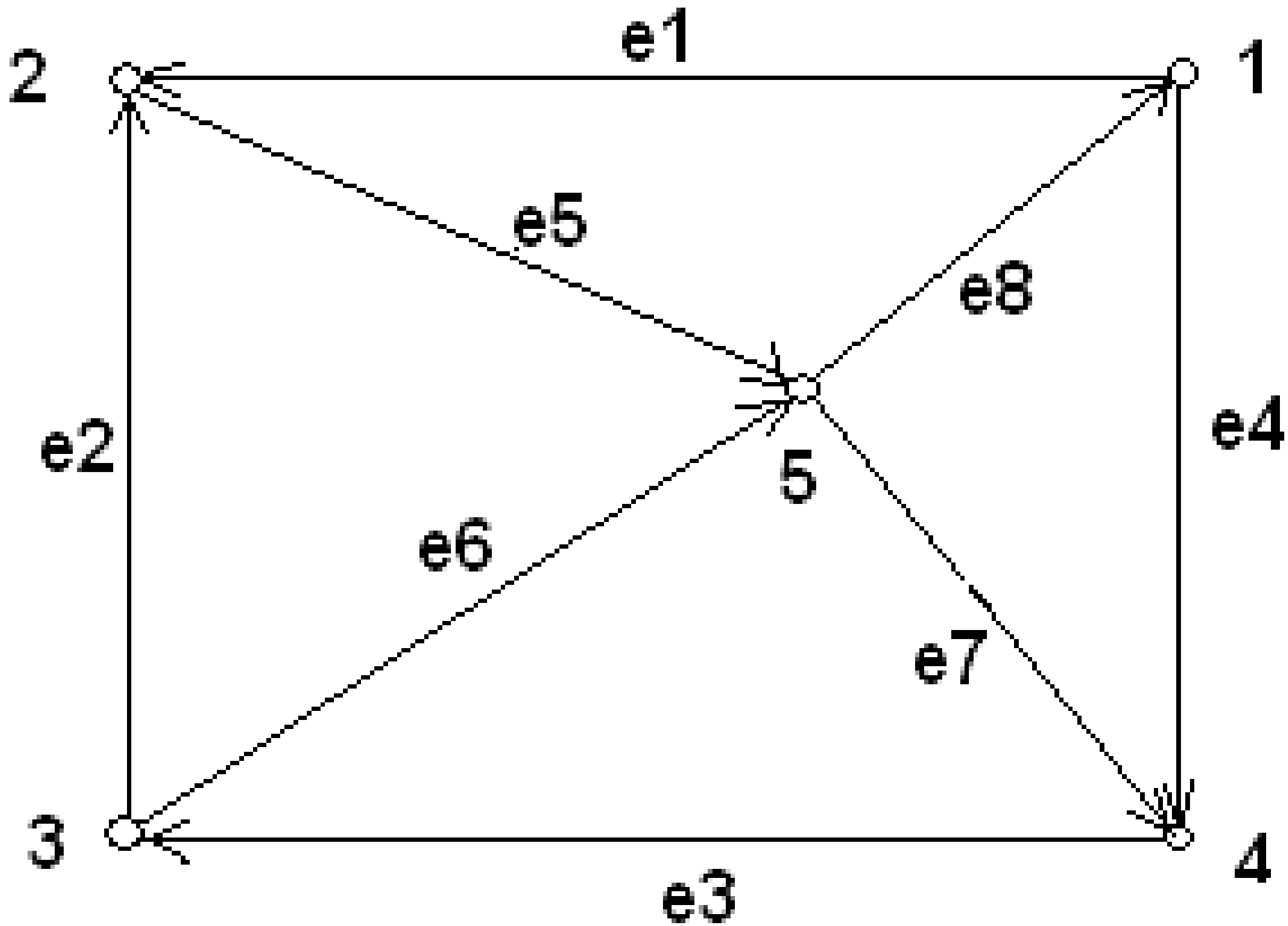
Свойства матрицы инцидентности простого графа

- Число единиц в i-строке равно степени i-вершины
- Число единиц в j-столбце равно двум
- Общее число единиц равно удвоенному числу ребер

Матрицы смежности и матрица инцидентности

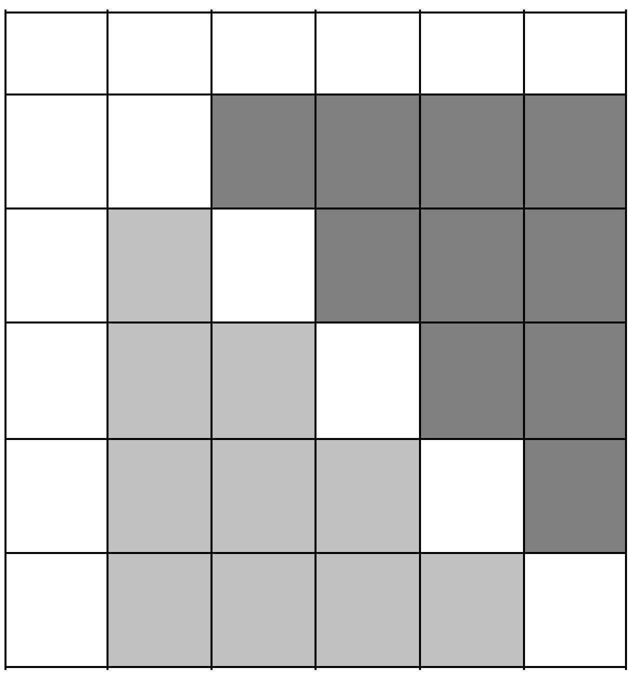
Для представления ориентированных графов можно использовать различные структуры данных. Выбор структуры данных зависит от операторов, которые будут применяться к вершинам и дугам орграфа. Для наглядного представления графа используют диаграммы, а для математических расчётов удобнее использовать представление графа *G (V, E)* в форме матрицы смежности.

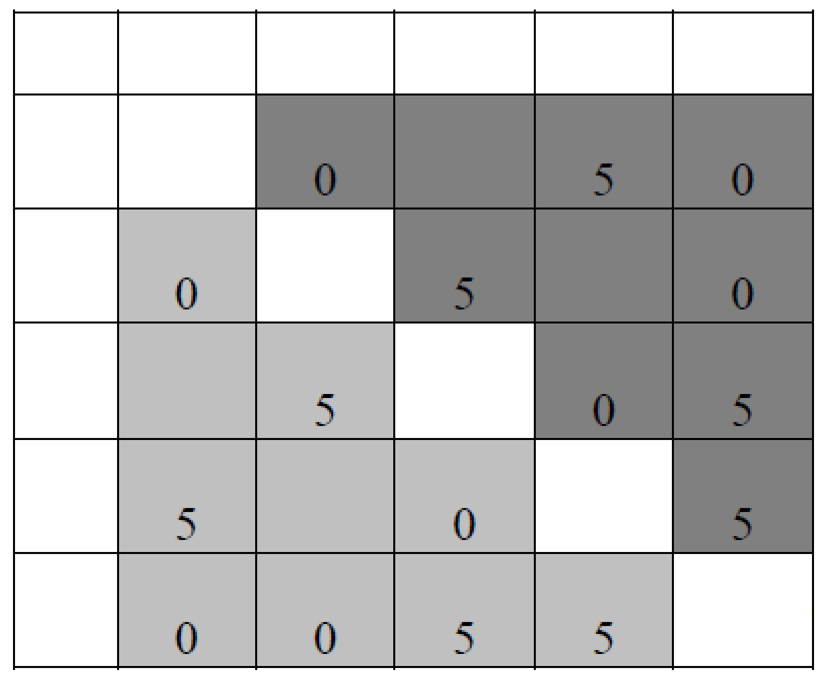
Орграф G в форме диаграммы



Матрица смежности

Матрицу смежности можно представить в виде таблицы, строки и столбцы ко-торой соответствуют номерам вершин графа. Если вершины смежны, то элементы матрицы смежности равны 1, если вершины не смежны, то элементы матрицы равны 0. Диагональные элементы матрицы равны 0, т.к. вершины сами с собой не смежны (их соединяет ребро).




0 5 0
0 5 0
5 0 5
5 0 5
0 0 5 5

Свойства матрицы смежности

- Таким образом *матрица смежности* ориентированного графа G — квадратная мат- рица $A(G)=[a_{ij}]$ порядка n

Если *e = (v, w)* — ребро в графе *G*, то можно говорить, что ребро *e* инцидентно вершине *v* или вершине *w*. Отношение инцидентности представляется в виде ***матрицы инцидентности.*** В матрице инцидентности сумма единиц по столбцам указывает на степень вершины v_i. Нередко расположение вершин и рёбер меняются местами (транспонируют). В матрице инцидентности ставится 1, если дуга исходит из вершины, n–1, если дуга заходит в неё.

Пусть в матрице инцидентности столбцы обозначают вершины, а строки — дуги, тогда матрица инцидентности для орграфа будет выглядеть, как представлено на рисунке:

Граф G в форме матрицы инцидентности

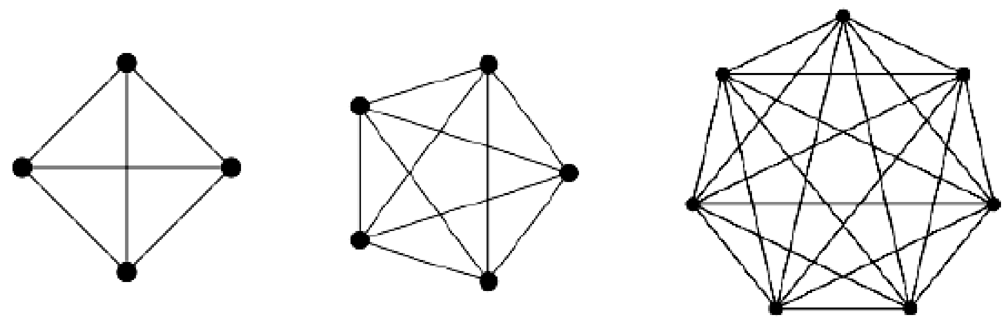
e 1		1			
e 2		1			
e 3			1		
e 4				1	
e 5					1
e 6					1
e 7				1	
e 8	1				

Свойства матрицы инцедентности

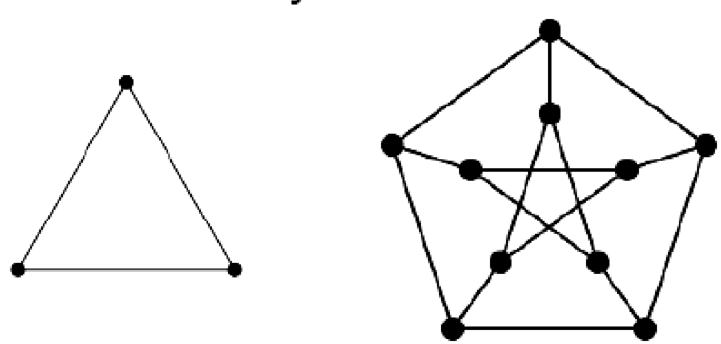
- Матрица инцидентности также содержит всю информацию о графе, но её использование затруднительно из-за большого количества нулей.
- *Матрица инцидентности* ориентированного графа G — прямоугольная матрица $B(G)=[b_{ij}]$ порядка nXm

Основные типы графов

- Граф, в котором каждая пара вершин смежна, называется **полным** графом.

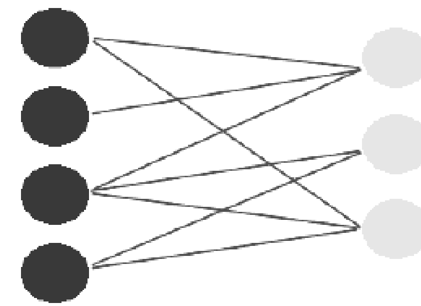


- Граф, у которого все вершины имеют одну и ту же степень r, называется **регулярным** графом степени r. Регулярный граф степени 3 называется кубическим.

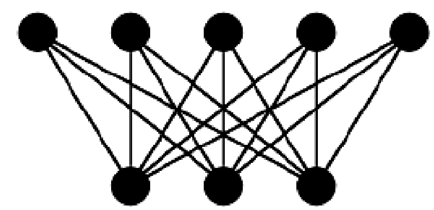


Основные типы графов

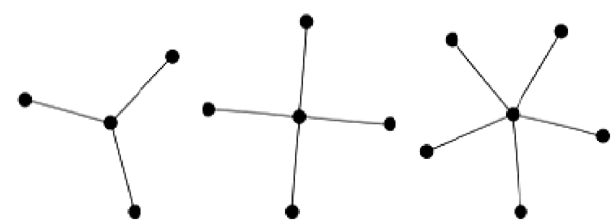
- Если множество вершин графа можно разделить на два не пустых и не пересекающихся подмножества таким образом, чтобы каждое ребро соединяло вершины из разных подмножеств, то такой граф называется **двудольным.**



- Если при этом каждая вершина одного подмножества соединена с каждой вершиной другого подмножества, то такой граф называется **полным двудольным**.

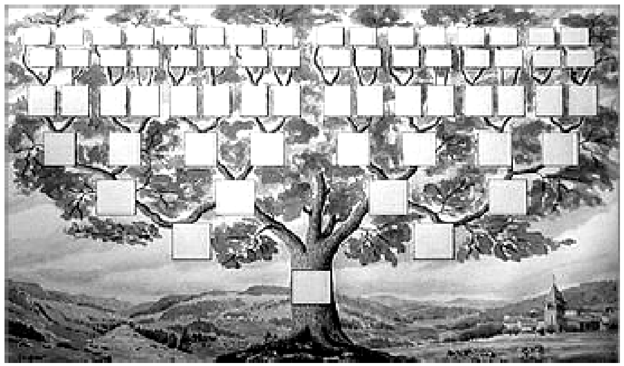


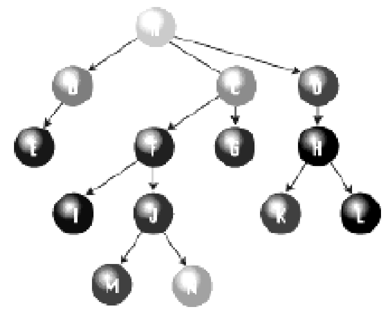
- Если в полном двудольном графе мощность одного из подмножеств равна 1, то такой граф называется **звездой**



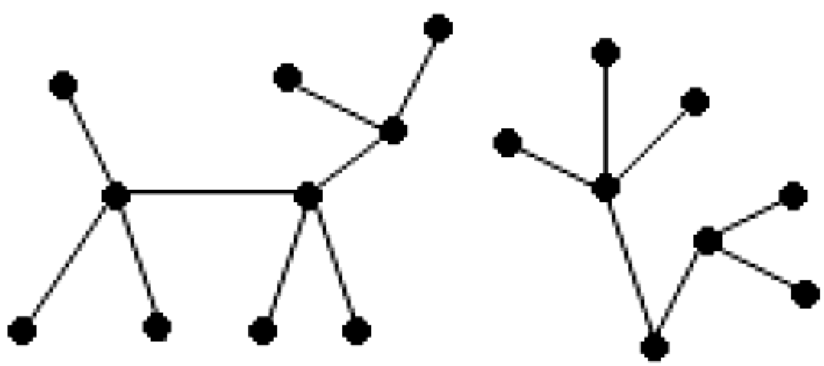
Основные типы графов

- **Дерево** – связный граф без циклов.





- **Лес** – граф без циклов.



Типовые задачи теории графов

1. Задача о кратчайшем пути: замена оборудования, составление расписания движения транспортных средств, размещение пунктов скорой помощи, размещение телефонных станций.
2. Задача о максимальном потоке: анализ пропускной способности коммуникационной сети, организация движения в динамической сети, оптимальный подбор интенсивностей выполнения работ, задача о распределении работ.

Типовые задачи теории графов

3. Задача об упаковках и покрытиях: оптимизация структуры ПЗУ (постоянного запоминающего устройства), размещение диспетчерских пунктов городской транспортной сети.

4. Раскраска в графах: распределение памяти в компьютере, проектирование сетей телевизионного вещания.

5. Связность графов и сетей: проектирование кратчайшей коммуникационной сети, синтез структурно-надёжной сети циркуляционной связи, анализ надёжности стохастических сетей связи.

Типовые задачи теории графов

6. Изоморфизм графов и сетей: структурный синтез линейных избирательных цепей, автоматизация контроля при проектировании БИС.

7. Изоморфное вхождение и пересечение графов: локализация неисправности с помощью алгоритмов поиска, покрытие схемы заданным набором типовых подсхем.

8. Автоморфизм графов: конструктивное перечисление структурных изомеров для производных органических соединений, синтез тестов цифровых устройств.

Формула Байеса

- Прибор может собираться из высококачественных деталей и деталей обычного качества. Из высококачественных деталей собираются 40% приборов.
- Если прибор собран из высококачественных деталей, его надежность (вероятность безотказной работы за время t) равна 0,95, если из деталей обычного качества – его надежность – 0,7. Прибор работал в течение времени *t* безотказно. Найти вероятность того, что прибор собран из высококачественных деталей.

Решение

- Возможны две гипотезы:

1. H_1 – прибор собран из высококачественных деталей;
2. H_2 – прибор собран из деталей обычного качества.

- Вероятность гипотез до опыта:
- $P(H_1) = 0.4;$
- $P(H_2) = 0.6.$

Решение

- В результате опыта наблюдается событие А: прибор безотказно работал в течение времени *t*. Условные вероятности этого события при гипотезах H_1 и H_2:

$$P(A|H_1) = 0.95,$$
$$P(A|H_2) = 0.7.$$

Условная вероятность гипотезы H_1:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2)} =$$

$$= \frac{0.4\cdot 0.95}{0.4\cdot 0.95 + 0.6\cdot 0.7} = 0.475$$

Формула Байеса

- Формула Бейеса позволяет переоценить вероятности гипотез после того, как становится известен результат испытания, в итоге которого появляется событие А. Если в результате испытания прибор вышел из строя, гипотезы H_1 и H_2 становятся невозможными. Необходимо выяснить и устранить причины отказа прибора.
-