

Информация о семестре

Преподаватель Роман Игоревич

Литература

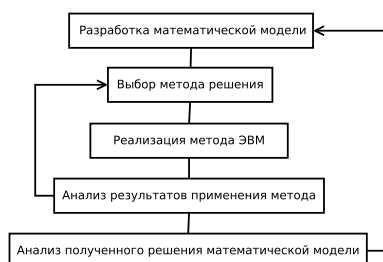
1. В.М. Вержбицкий — «Численные методы» (ЧМ)
2. Е.А. Волков — «Численные методы»
3. А.А. Самарский — «Численные методы»
4. А.П. Колесников — «Численный анализ»
5. Н.С. Бахвалов
6. А.Б. Самохин — «Численные методы»

Лекция 1 (06.09.16)

Множества чисел

1. $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел
2. $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел (включает $\mathbb{N}$)
3. $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел (включает $\mathbb{Z}$)
4. $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел (включает $\mathbb{Q}$)
5. $\mathbb{D}$ — множество комплексных чисел (включает $\mathbb{R}$)

Блок-схема решения прикладной задачи с численными методами



Методы решения

1. Аналитический: результат — формула
2. Численный: предполагает определенный уровень дискретности
3. Асимптотический: в решении присутствует некоторый малый параметр, изменение которого позволяет осуществить **предельный переход**.

Классификация погрешностей результатов численного решения задач

1. Неустраняемая: неадекватность математической модели
2. Методическая: применение того или иного математического метода для создания математической модели
3. Вычислительная: округление чисел

Дано

1. Стержень длиной l и сечением S
2. Температуры на концах стержня равны нулю: $T(0, 0) = 0$, $T(0, l) = 0$
3. Через стержень протекает электрический ток, приводя к его нагреву

Найти зависимость температуры от времени

Решение

$$(kT')' = f(x)$$

k — коэффициент теплопроводности

T — температура

$$S = const \Rightarrow k = const$$

$$T'' = \frac{f(x)}{k}$$

$$T' = \frac{1}{k} \int_0^x f(t) dt + C$$

$$T = \int_0^t \left(\int_0^y \frac{f(t)}{k} dt + C \right) dy + C_1$$

$$x = 0, T(0) = C_1, C_1 = 0$$

$$\int_0^l \left(\int_0^y \frac{f(t)}{k} dt + C \right) dy = 0$$

$$\int_0^l \int_0^y \frac{f(t)}{k} dt dy + C \int_0^l dy = 0$$

$$C = -\frac{1}{l} \int_0^l \int_0^y \frac{f(t)}{k} dt dy$$

Семинар 1 (12.09.16)

Преподаватель Марина Алексеевна

А. Найти абсолютную и относительную ошибки, где a_1, a_2, a_3 — приближенные величины, данные с погрешностями $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

Пример 1 $\frac{a_1 \operatorname{tg}(a_2^\alpha)}{(a_1^\beta + a_2) \ln(a_3)}, \alpha = \frac{1}{3}, \beta = 3$

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = \frac{(a_1^\beta + a_2) \ln(a_3) \operatorname{tg}(a_2^\alpha)}{(a_1^\beta + a_2)^2 \ln^2(a_3)} - \frac{a_1 \operatorname{tg}(a_2^\alpha) \ln(a_3) \beta a_1^{\beta-1}}{(a_1^\beta + a_2)^2 \ln^2(a_3)} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}(a_2^\alpha)}{(a_1^\beta + a_2) \ln(a_3)} - \beta a_1^\beta \frac{\operatorname{tg}(a_2^\alpha)}{\ln(a_3) (a_1^\beta + a_2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_2} = \frac{(a_1^\beta + a_2) \ln(a_3) a_1^{\frac{\alpha a_2^{\alpha-1}}{\cos^2(a_2^\alpha)}}}{(a_1^\beta + a_2)^2 \ln^2(a_3)} - \frac{a_1 \operatorname{tg}(a_2^\alpha) \ln(a_3)}{(a_1^\beta + a_2)^2 \ln^2(a_3)} =$$

$$= a_1 \frac{1 + \operatorname{tg}^2(a_2^\alpha)}{a_2^{1-\alpha} (a_1^\beta + a_2) \ln(a_3)} - a_1 \frac{\operatorname{tg}(a_2^\alpha)}{(a_1^\beta + a_2)^2 \ln(a_3)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_3} = \frac{(a_1^\beta + a_2) \ln(a_3) \cdot 0}{(a_1^\beta + a_2) \ln^2(a_3)} - \frac{a_1 \operatorname{tg}(a_2^\alpha) (a_1^\beta \frac{1}{a_3} + \frac{a_2}{a_3})}{(a_1^\beta + a_2)^2 \ln^2(a_3)} = -a_1 \frac{\operatorname{tg}(a_2^\alpha)}{(a_1^\beta + a_2) \ln^2(a_3) a_3}$$

$$\begin{aligned}\Delta f = & \left| \frac{tg(a_2^\alpha)}{(a_1^\beta + a_2) \ln(a_3)} - \beta a_1^\beta \frac{tg(a_2^\alpha)}{\ln(a_3)(a_1^\beta + a_2)^2} \right| \cdot \Delta_1 + \\ & + \left| a_1 \alpha \frac{(1 + tg^2(a_2^\alpha))}{a_2^{1-\alpha}(a_1^\beta + a_2) \ln(a_3)} - a_1 \frac{tg(a_2^\alpha)}{(a_1^\beta + a_2)^2 \ln(a_3)} \right| \cdot \Delta_2 + \\ & + \left| -a_1 \frac{tg(a_2^\alpha)}{(a_1^\beta + a_2) \ln^2(a_3) a_3} \right| \cdot \Delta_3\end{aligned}$$

Пример 2 $\frac{a_3(a_1^\alpha + e^{a_2})}{\arctg(a_1 a_2^\beta)}$, $\alpha = \frac{1}{5}$, $\beta = 4$

$$\frac{\partial f}{\partial a_3} = \frac{(a_1^\alpha + e^{a_2})}{\arctg(a_1 a_2^\beta)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial a_1} &= \frac{(a_3 \alpha a_1^{\alpha-1}) \arctg(a_1 a_2^\beta)}{\arctg^2(a_1 a_2^\beta)} - \frac{a_3(a_1^\alpha + e^{a_2}) \frac{a_2^\beta}{1+(a_1 a_2^\beta)^2}}{\arctg^2(a_1 a_2^\beta)} = \\ &= \frac{a_3 \alpha a_1^{\alpha-1}}{\arctg(a_1 a_2^\beta)} - \frac{a_3(a_1^\alpha + e^{a_2}) \frac{a_2^\beta}{1+(a_1 a_2^\beta)^2}}{\arctg^2(a_1 a_2^\beta)} = \frac{a_2}{1 + a_1^2 a_2^{2\beta}} \\ \frac{\partial f}{\partial a_2} &= \frac{a_3 e^{a_2} \arctg(a_1 a_2^\beta)}{\arctg^2(a_1 a_2^\beta)} - \frac{a_3(a_1^\alpha + e^{a_2}) \frac{a_1 a_2^{\beta-1} \beta}{1+a_1^2 a_2^{2\beta}}}{\arctg^2(a_1 a_2^\beta)}\end{aligned}$$

...

Пример 3 $\frac{a_1 a_2^\alpha}{(a_1^\beta + a_2) a_3}$, $\alpha = \frac{1}{5}$, $\beta = 3$

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = \frac{a_2^\alpha (a_1^\beta + a_2) a_3 - a_1 a_2^\alpha (a_3 a_1^{\beta-1})}{((a_1^\beta + a_2) a_3)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_2} = \frac{\alpha a_1 a_1^{\alpha-1} (a_1^\beta + a_2) a_3 - a_1 a_2^\alpha a_3}{((a_1^\beta - a_2) a_3)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_3} = -\frac{a_1 a_2^\alpha}{(a_1^\beta + a_2) a_3^2}$$

...

Б. Дано приближенное число и его погрешность. Найти количество верных знаков.

Пример 1 3457, 0,6

1. $10^3 \Rightarrow m = 3$
2. $a = a_m \cdot 10^3 + a_{m-1} \cdot 10^2 + \dots + a_{m-n+1} \cdot 10^{m-n+1}$
3. m — величина старшего разряда
4. n — текущий номер знака, отсчитываемый слева направо
5. Говорят, что k первых знаков приближенного числа **верные**, если абсолютная погрешность $|Aa| \leq \Delta a \leq 0.5 \cdot 10^{m-k+1}$, т.е. меньше половины соответствующего разряда.
6. Подбирается минимальное число вида $0.5 \cdot 10^l > \Delta a$ и сравниваются разряды.
7. A — точное значение величины (неизвестно)
8. a — приближенное значение величины (известно)
9. $0.6 < 0.5 \cdot 10^k$; $k_{min} = 1$
10. $m - n + 1 = k_{min}$; $n = 3$

Ответ: первые 3 знака верны

Пример 2 17.69; 0.07

1. $17.69 = 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2}$; $m = 1$
2. $0.07 < 0.5 \cdot 10^k$; $k_{min} = 0$
3. $m - n + 1 = 0$; $n = m + 1 = 2$

Ответ: первые 2 знака верны

Пример 3 6543; 2

1. $6543 = 6 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$; $m = 3$
2. $2 < 0.5 \cdot 10^k$; $k_{min} = 1$
3. $m - n + 1 = 1$; $n = 3$

Ответ: первые 3 знака верны

Пример 4 11.23; 0.006

1. $11.23 = 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}; m = 1$

2. $0.006 < 0.5 \cdot 10^k; k_{min} = -1$

3. $m - n + 1 = -1; n = 3$

Ответ: первые 3 знака верны

В. Дана геометрическая фигура. Определить в трехмерном случае объем и полную поверхность, плоском случае — площадь и периметр. Погрешность = 1 см

Пример 1 Дана равнобедренная трапеция со сторонами основания $a = 42\text{см}$ и $b = 18\text{см}$ и высотой $h = 5\text{см}$.

1. $l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{144 + 25} = 13\text{см}$

2. $S = m \cdot h = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh =$
 $= \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 5 = 150$

(a) $\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{1}{2}h \cdot \Delta a = \frac{5}{2}$

(b) $\frac{\partial S}{\partial b} = \frac{1}{2}h \cdot \Delta b = \frac{5}{2}$

(c) $\frac{\partial S}{\partial h} = \frac{1}{2}(a+b)\Delta h = 30$

(d) $\Delta S = \frac{\partial S}{\partial a} + \frac{\partial S}{\partial b} + \frac{\partial S}{\partial h} = 25$

(e) $\delta S = \frac{\Delta S}{|S|} = \frac{35}{150} = \frac{7}{30} = 0.833$

3. $P = 2l + b + a = 26 + 60 = 86$

(a) $P = 2\sqrt{h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + b + a$

(b) $\frac{\partial P}{\partial h} = \frac{2 \cdot 2 \cdot h}{2\sqrt{h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}} \Delta h = \frac{10}{13}$

(c) $\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{2}{2\sqrt{h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}} \frac{2(a-b)}{4} \Delta a + \Delta a = \frac{24}{26} + 1 = \frac{25}{13}$

(d) $\frac{\partial P}{\partial b} = \frac{2}{2\sqrt{h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}} \frac{2(a-b)(-1)}{4} \Delta b + \Delta b = 1 - \frac{24}{26} = \frac{1}{13}$

(e) $\Delta P = \frac{\partial P}{\partial h} + \frac{\partial P}{\partial a} + \frac{\partial P}{\partial b} = \frac{10}{13} + 2 = \frac{36}{13} = 2.169$

(f) $\delta P = \frac{\Delta P}{|P|} = \frac{36}{13 \cdot 86} = 0.0322$

Пример 2 Дан прямоугольный параллелепипед с высотой $h = 15$ см, стороной основания $a = 40$ см и диагональю основания $d = 50$ см. Определить объем и полную поверхность параллелепипеда.

$$1. V = a \cdot b \cdot h = a \cdot \sqrt{d^2 - a^2} \cdot h = ah\sqrt{d^2 - a^2}$$

$$(a) \frac{\partial V}{\partial a} = (h \cdot \sqrt{d^2 - a^2} + ah \frac{-2a}{2\sqrt{d^2 - a^2}}) \Delta a = \\ = 15 \cdot 30 - \frac{1600 \cdot 15}{30} = 450 - 800 = -350$$

$$(b) \frac{\partial V}{\partial d} = (ah \frac{2d}{\sqrt{d^2 - a^2}}) \Delta d = \frac{ahd}{\sqrt{d^2 - a^2}} \Delta d = \\ = \frac{ahd}{\sqrt{d^2 - a^2}} \Delta d = \frac{40 \cdot 15 \cdot 50}{30} = 1000$$

$$(c) \frac{\partial V}{\partial h} = (a\sqrt{d^2 - a^2}) \Delta h = 40 \cdot 30 = 1200$$

$$(d) \Delta V = \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial d} + \frac{\partial V}{\partial h} = 2200 - 350 = 1850$$

$$(e) \delta V = \frac{\Delta V}{|V|} = \frac{1850}{18000} = 0.1027$$

$$2. S = 2(a \cdot b + b \cdot h + h \cdot a) = 2(40 \cdot 30 + 30 \cdot 15 + 15 \cdot 40) = 4500$$

$$(a) S = 2(a\sqrt{d^2 - a^2} + h\sqrt{d^2 - a^2} - ha)$$

$$(b) \frac{\partial S}{\partial a} = 2(\frac{-2a^2}{2\sqrt{d^2 - a^2}} + 2\sqrt{d^2 - a^2} - \frac{2ah}{2\sqrt{d^2 - a^2}} + h) \Delta a = \\ = 2(-\frac{a^2}{\sqrt{d^2 - a^2}} + \sqrt{d^2 - a^2} - \frac{ah}{\sqrt{d^2 - a^2}} + h) \Delta a = -56.666$$

$$(c) \frac{\partial S}{\partial d} = 183.33$$

$$(d) \frac{\partial S}{\partial h} = 140$$

$$(e) \Delta S = 266.66$$

$$(f) \partial S = \frac{\Delta S}{|S|} = \frac{266.66}{4500} = 0.059$$

Лекция 2 (13.09.16)

Преподаватель: Виктор Викторович Чердынцев

1 Вычислительная математика

— раздел математики, развивающий численные методы решения задач.

Любые приближенные методы вычислений дают некоторую погрешность (ошибку):

1. Систематические ошибки — ошибка математической модели
2. Статистические ошибки
 - (a) Погрешность округления
 - (b) Приближенный характер начальных данных

1.1 Абсолютная и относительная погрешность

Пусть

1. A — неизвестное **точное** значение
2. a — известное **приближенное** значение

Тогда Предельная относительная погрешность — минимальное значение величины Δa , удовлетворяющее условию $\Delta a \geq |A - a| \implies a - \Delta a \leq A \leq a + \Delta a$.

Определение a и Δa рассматривается в математической статистике. На практике, если имеется n испытаний a_i , то $a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$, $\Delta a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i - a|$. В этом случае Δa определяется с определенной вероятностью $P(\Delta a \geq |A - a|) \geq n$, $0 < P < 1$.

Для оценки качества измерения вводится **относительная погрешность** $\delta_a \approx \frac{\Delta a}{|a|}$.

Знание a и Δa позволяет записать A в **символическом виде** $A = a \pm \Delta a$ или $A = a(1 \pm \delta a)$.

1.2 Количество верных знаков приближенного числа

Запишем a в виде $a = \alpha_m \cdot 10^m + \alpha_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + \alpha_{m-n+1} \cdot 10^{m-n+1}$, где

1. $0 \leq \alpha_i \leq 9$
2. m — величина разряда
3. n — порядковый номер цифры в числе относительно старшего разряда

Количество верхних знаков определяется из условия $\Delta a \leq 0.5 \cdot 10^{m-n+1}$, т.е. как половина единицы разряда, при котором это условие выполняется.

Пример 1

Пусть

1. $a = 6357.6$
2. $\Delta a = 0.7$

Тогда

1. $m = 3$
2. $0.7 \leq 0.5 \cdot 10^{3-n+1}$

$n = 3$ — количество верных знаков

1.3 Погрешность функции

Пусть $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где погрешность $a_i - \Delta_i$

Тогда

$$|f(a_1 \pm \Delta_1, a_2 \pm \Delta_2, \dots, a_n \pm \Delta_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)| =$$

Разложим в многомерный ряд Тейлора и ограничим линейными членами:

$$= |f(a_1, \dots, a_n) \pm \frac{\partial f}{\partial a_1} \Delta_1 \pm \dots \pm \frac{\partial f}{\partial a_n} \Delta_n - f(a_1, \dots, a_n)| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial a_1} \right| \Delta_1 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial a_n} \right| \Delta_n$$

$$\Delta_i \ll |a_i|$$

Погрешность простейших функций 2-х переменных

1. $f(a_1, a_2) = a_1 + a_2, \Delta_1, \Delta_2$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial a_1} \right| = 1; \left| \frac{\partial f}{\partial a_2} \right| = 1$$

$$\Delta_f = \Delta_1 + \Delta_2$$

$$\delta_f = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{|a_1 + a_2|}$$

2. $f(a_1, a_2) = a_1 \cdot a_2$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial a_1} \right| = |a_2|; \left| \frac{\partial f}{\partial a_2} \right| = |a_1|$$

$$\Delta_f = |a_2| \Delta_1 + |a_1| \Delta_2$$

$$\delta_f = \frac{|a_2| \Delta_1 + |a_1| \Delta_2}{|a_1 a_2|} = \frac{\Delta_1}{|a_1|} + \frac{\Delta_2}{|a_2|}$$

3. $f(a_1, a_2) = \frac{a_1}{a_2}$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial a_1} \right| = \left| \frac{1}{a_2} \right|; \left| \frac{\partial f}{\partial a_2} \right| = \left| \frac{a_1}{a_2^2} \right|$$

$$\Delta f = \frac{\frac{1}{|a_2|} \Delta_1 + \left| \frac{a_1}{a_2^2} \right| \Delta_2}{\left| \frac{a_1}{a_2} \right|} = \frac{\Delta_1}{|a_1|} + \frac{\Delta_2}{|a_2|} = \delta_1 + \delta_2$$

4. $f = a^v$

$$\Delta_f = |v| |a^{v-1}| \Delta_v$$

$$\delta_f = |v| \delta_a$$

1.4 Погрешность вычисления сторон прямоугольного треугольника

Пример 1

Дано $a = 30\text{см}, b = 40\text{см}, \Delta = 1\text{см}$

Найти c, Δ_c

Решение $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 50\text{см}$

$$\Delta_c = \left| \frac{\partial c}{\partial b} \right| \Delta + \left| \frac{\partial c}{\partial a} \right| \Delta = \frac{a}{c} \Delta + \frac{b}{c} \Delta = 1.4\text{см}$$

Пример 2

Дано $c = 50\text{см}, a = 30\text{см}$

Найти b, Δ_b

Решение $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$$\Delta_b = \left| \frac{\partial b}{\partial c} \right| \Delta + \left| \frac{\partial b}{\partial a} \right| \Delta = \left| \frac{c}{b} \right| \Delta + \left| -\frac{a}{b} \right| \Delta = \frac{50}{40} + \frac{30}{40} = 2\text{см}$$

1.5 Интерполяционные полиномы

Таблица узлов:

N	0	1	...	n
x	x_0	x_1	...	x_n
y	y_0	y_2	...	y_n

Необходимо найти приближенное поведение функции между узлами.

Обычно рассматривается приближенная функция в виде суммы элементарных функций с неизвестными коэффициентами.

$$P_n \approx \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(ix) \\ x^i \end{cases}$$

a_i находится из **критерия интерполяции**, который гласит, что при приближении функция должна проходить через узлы $P(x_i) \equiv y_i$.

Рассмотрим полиномиальное приближение $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Полином степени n однозначно определяется своими значениями в $n+1$ точке.

$\sum_{i=0}^n a_i x_k^i = y_k, 0 \leq k \leq n$ — система линейных уравнений относительно a_i . Её решение требует $\sim n^3$ операций. Рассмотрим методы, позволяющие избежать непосредственного решения системы.

1.5.1 Интерполяционный полином Лагранжа

Идея этого метода состоит в представлении $P_n(x)$ в виде $y_0L_0 + y_1L_1 + \dots + y_nL_n$, где

1. y_i — ординаты узлов
2. L_i — полиномы степени n , не содержащие значения ординат узлов y_i и обладающие свойствами

(a) $L_i(x_i) = 1$

(b) $L_i(x_j) = 0$

(c) $i \neq j$

(d) количество узлов $= n+1$

(e) ..., т.е. $L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{N_i}$

i. N_i — значение числителя при $x = x_i$

т.о. $P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{j=0}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

Отклонение приближающего полинома от $f(x)$: $|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)|$

$$M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)|$$

В этом выражении можно минимизировать только полином степени $n+1$.

Известно, что полином Чебышева $T_n(t) = \arccos(n \cos t)$ имеет наименьшее отклонение от абсцисс на $[-1, 1]$.

Корни полинома T_i

$$(n+1)\cos t = \frac{\pi}{2}R + \pi k$$

$$\cos t = \frac{1+2k}{n+1}\pi$$

$$t_k = \arccos\left(\frac{1+2k}{2(n+1)}\right)$$

Если узлы расположены на $[-1, 2]$ таким образом, то отклонение будет минимальным.

Для произвольного отрезка $[a, b]$ применим линейное преобразование, имеющее вид полинома Лагранжа. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$

Если расположить узлы по Чебышевскому закону $x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_k$, то $|(x - x_0)\dots(x - x_n)| = (\frac{b-a}{2})^{n+1} \cdot |(t - t_0)\dots(t - t_n)|$, т.е. минимальное отклонение от приближаемой функции.

1.5.2 Первый интерполяционный полином Ньютона

Рассмотрим равномерное распределение узлов $x_i = x_0 + ih$, где $x_0 = a$; $h = \frac{b-a}{n}$.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Добавление нового узла приводит к добавлению к $P_n(x)$ нового слагаемого, а остальная структура не меняется.

Для определения a_i введем понятие **конечной разности**: $\Delta y(x) = y(x + h) - y(x)$ — конечная разность первого порядка, $\Delta^2 y(x) = \Delta y(x + h) - \Delta y(x) = y(x + 2h) - 2y(x + h) + y(x)$ — конечная разность второго порядка. Конечные разности высших порядков определяются рекуррентной формулой $\Delta^{(k+1)}y(x) = \Delta^k y(x + h) - \Delta^k y(x)$.

Перепишем полином в ином виде $P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_0 - h) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_0 - h)\dots(x - x_0 - (n-1)h)$. Обозначим $x - x_0 = \tilde{x}$ и рассмотрим конечную разность выражения $\tilde{x}^{[n]} = \tilde{x}(\tilde{x} - h)\dots(x - (n-1)h)$ — обобщенное произведение. $\Delta \tilde{x}^{[n]} = nh\tilde{x}^{[n-1]}$ и т.о. $\Delta^k \tilde{x}^{[n]} = n(n-1)\dots(n-k+1)h^k \cdot \tilde{x}^{n-k+1}$.

$$a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

1.5.3 Второй интерполяционный полином Ньютона

Последовательное добавление узлов к правой границе уточняет поведение приближающей функции вблизи x_n .

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + a_n(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

$$a_n = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{n!h^k}$$

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_{n-1})(x - x_n) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

Для минимизации полинома Ньютона используются таблицы конечных разностей:

n	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	
1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	
2				

Первый ряд даёт коэффициенты первого полинома Ньютона

Побочная диагональ даёт коэффициенты второго полинома Ньютона

1.6 Интерполяция сплайнами

Сплайн — приближающая функция на $[a, b]$, являющаяся на численных отрезках $[x_{i-1}, x_i]$ полиномом небольшой степени $n \leq 3$, а на всём отрезке $[a, b]$ обладает непрерывными производными. Использование сплайнов позволяет избежать сильного отклонения полиномов между узлами с ростом степени.

Сплайн: $S^{n,k}$, где k — дефект, а $n - k$ — количество непрерывных производных

$$\text{Сплайн первого порядка: } S^{1,1}(x), S_i(x) = y_{i-1} \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + y_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

$$\text{Сплайн третьего порядка: } S^{3,2}(x) \text{ на } [x_{i-1}, x_i], S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3.$$

Для определения коэффициентов используется:

1. Непрерывность S_i в узлах $S_i(x_i) = S_{i-1}(x_i)$

$$a_i \equiv y_{i-1}$$

2. Непрерывность первой производной $S'_i = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2$, $S_i(x_i) = S_{i-1}(x_i)$

$$b_i = b_{i-1} + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}$$

3. Непрерывность второй производной $S''_i(x) = 2c_1 + 6d_i(x - x_{i-1})$, $S''_{i+1} = S''_i(x_i)$

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i$$

4. Недостающие два соотношения обычно получают с помощью $c_1 = 0$, $c_n = n$

$$b_i = \frac{h_i}{3} c_{i+1} = \frac{2}{3} h_i c_0 + \frac{\Delta_{i-1}}{h_i}$$

Семинар 2 (26.09.16)

Интерполяция (интерполирование)

— процесс построения интерполяционной функции, или процесс нахождения промежуточных значений табличных функций.

Постановка задачи интерполирования

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей $y_n = f(x_n)$.

Тогда задача интерполирования ставится обычно в следующей форме: найти многочлен $P(x) = P_n(x)$ степени не выше n , значение которого в точках x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) совпадает со значениями данной функции, т.е. $P(x_i) = y_i$.

Геометрически это означает, что нужно найти алгебраическую кривую вида $y = a_0x_n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, проходящую через заданную систему точек $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$).

Многочлен $P(x)$ называется **интерполяционным многочленом**. Точки x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) называются **узлами интерполяции**. В указанной постановке задача интерполяции имеет единственное решение.

Интерполяционные функции обычно используются при нахождении неизвестных значений функции $f(x)$ для промежуточных значений аргумента. При этом различают интерполирование в узком смысле, когда $x \in [x_0, x_n]$ и экстраполирование, когда $x \notin [x_0, x_n]$.

Во многих случаях функция задаётся таблично. Приблизительно описывается зависимость между узлами. Приближающаяся функция обычно берется в виде суммы элементарных функций. На практике используются степенные, показательные и тригонометрические функции.

Полиномиальное приближение

Будем рассматривать полиномиальное приближение, т.е. когда приближающая функция имеет вид $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Рассмотрим три полинома: полином Лагранжа и первый и второй полиномы Ньютона.

Интерполяционный полином Лагранжа

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})(x-x_{n+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

Пример 1 Построить интерполяционный полином Лагранжа и провести проверку.

N	0	1	2	3
x	0	0.5	1	1.5
y	1	2	3	1

— таблица узлов

Решение Для $N = 3$ запишем полином Лагранжа:

$$P_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Подставим...

$$P_3(x) = \frac{(x-0.5)(x-1)(x-1.5)}{(0-0.5)(0-1)(0-1.5)} + 2 \frac{(x-0)(x-1)(x-1.5)}{(0.5-0)(0.5-1)(0.5-1.5)} +$$

$$+ 3 \frac{(x-0)(x-0.5)(x-1.5)}{(1-0)(1-0.5)(1-1.5)} + \frac{(x-0)(x-0.5)(x-1)}{(1.5-0)(1.5-0.5)(1.5-1)} =$$

$$= \frac{(x^2 - x - 0.5x + 0.5)(x - 1.5)}{-0.75} + \frac{2(x^2 - x)(x - 1.5)}{0.25} +$$

$$+ \frac{3(x^2 - 0.5x)(x - 1.5)}{-0.25} + \frac{(x^2 - 0.5x)(x - 1)}{0.75} = \frac{-4x^3 + 6x^2 + 1}{1}$$

Проверка

1. $P_3(x_0) = -4x_0^3 + 6x_0^2 + 1 = 1 \equiv y_0$
2. $P_3(x_1) = -4 \cdot 0.5^3 + 6 \cdot 0.5^2 + 1 = 2 \equiv y_1$
3. $P_3(x_2) = -4 + 6 + 1 = 3 \equiv y_2$
4. $P_3(x_3) = -4 \cdot 1.5^3 + 6 \cdot 1.5^2 + 1 = 1 \equiv y_3$

Пример 2 Построить интерполяционные полиномы Ньютона по предыдущей таблице узловых точек.

N	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	0	1	1	0	-3
1	0.5	2	1	-3	
2	1	3	-2		
3	1.5	1			

Первый интерполяционный полином Ньютона

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

$$\dots + \frac{\Delta^n y}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Конечные разности первого порядка

$$\Delta y(x) = y(x + h) - y(x), x \in [x_0, x_n], h = 0.5$$

$$\Delta y(x) = y(x + 0.5) - y(x)$$

$$\Delta y(x_0) = y(x_0 + 0.5) - y(x_0) = 2 - 1 = 1$$

$$\Delta y(x_1) = y(x_1 + 0.5) - y(x_1) = y(1) - y(0.5) = 3 - 2 = 1$$

$$\Delta y(x_2) = y(x_2 + 0.5) - y(x_2) = y(1.5) - y(1) = 1 - 3 = -2$$

Конечные разности второго порядка

$$\Delta^2 y(x) = \Delta y(x + h) - \Delta y(x) = y(x + 2h) - 2y(x + h) + y(x)$$

$$\Delta^2 y(x) = y(x + 1) - 2y(x + 0.5) + y(x)$$

$$\Delta^2 y(x_0) = y(1) - 2y(0.5) + y(0) = 3 - 2 \cdot 2 + 1 = 0$$

$$\Delta^2 y(x_1) = y(0.5 + 1) - 2y(0.5 + 0.5) + y(0.5) = 1 - 2 \cdot 3 + 2 = -3$$

...

Конечная разность i -го порядка определяется через рекуррентное соотношение

$$\Delta^{i+1} y(x) = \Delta^i y(x + h) - \Delta^i y(x)$$

$$\Delta^3 y(x) = \Delta^2 y(x + h) - \Delta^2 y(x) = y(x + 3h) - 2y(x + 2h) + y(x + h) - y(x + 2h) + 2y(x + h) - y(x) = y(x + 3h) - 3y(x + 2h) + y(x)$$

$$\Delta^3 y(x) = y(x + 1.5) - 3y(x + 1) + 3y(x + 0.5) - y(x)$$

$$\Delta^3 y(0) = y(1.5) - 3y(1) + 3y(0.5) - y(0) = 1 - 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 1 = -3$$

$$P_3(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{6h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{0.5}x - \frac{3}{6 \cdot 0.5^2}x(x - 0.5)(x - 1) =$$

$$= 1 + 2x - \frac{1}{2 \cdot 0.125}x(x^2 - x - 0.5 + 0.5) = -4x^3 + 6x^2 + 1$$

Второй интерполяционный полином Ньютона

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x-x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{h^2 2!}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{h^n n!}(x-x_n)\dots(x-x_1)$$

$$\begin{aligned} P_3(x) &= y_3 + \frac{\Delta y_2}{h}(x-x_3) + \frac{\Delta^2 y_1}{2h^2}(x-x_3)(x-x_2) + \frac{\Delta^3 y_0}{6h^3}(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1) \\ P_3(x) &= 1 - 2 \cdot \frac{x-1.5}{0.5} - \frac{3}{2 \cdot 0.25}(x-1.5)(x-1) - \frac{3}{6 \cdot 0.125}(x-1.5)(x-1)(x-0.5) = \\ &= (1-4x-1.5) - 6(x^2-x-1.5x-1.5) - 4(x^2-x-1.5x+1.5)(x-0.5) = \\ &= -4x^3 + 6x^2 + 1 \end{aligned}$$

Пример 3

N	x	y
0	-0.5	1
1	0	2
2	0.5	-1
3	1	-1

$$\begin{aligned} P_n(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\ &+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \\ &= \frac{x(x-0.5)(x-1)}{-0.5 \cdot (-1) \cdot (-1.5)} + 2 \frac{(x+0.5)(x-0.5)(x-1)}{0.5 \cdot (-0.5) \cdot (-1)} - \\ &\quad - \frac{(x+0.5)x(x-1)}{0.5 \cdot (-0.5)} - \frac{(x+0.5)x(x-0.5)}{1.5 \cdot 0.5} = \\ &= \frac{(x^2-x)(x-0.5)}{-0.75} + 2 \frac{(x^2-0.25)(x-1)}{0.25} - \frac{(x^2-x)(x+0.5)}{-0.25} - \frac{x^3-0.25x}{0.75} = \\ &= \frac{x^3-1.5x^2+0.5x}{-0.75} + 2 \frac{x^3-x^2-0.25x+0.25}{0.25} - \frac{x^3-0.5x^2-0.5x}{-0.25} - \frac{x^3-0.25x}{0.75} = \\ &= \frac{-x^3+1.5x^2-0.5x+6x^3-6x^2-1.5x+1.5+3x^3-1.5x^2-1.5x-x^3+0.25x}{0.75} = \\ &= \frac{7x^3-6x^2-3.25x+1.5}{0.75} = \frac{4(7x^3-6x^2-3.25x+1.5)}{3} = \frac{28x^3}{3} - 8x^2 - \frac{13x}{3} + 2 \end{aligned}$$

Проверка

$$P_1(-0.5) = -\frac{28}{3 \cdot 8} - \frac{8}{4} - \frac{13}{3 \cdot 2} + 2 = -\frac{7}{6} - 2 + \frac{13}{6} + 2 = 1 \equiv y_0$$

$$P_3(0) = 2 \equiv y_1$$

$$P_3(0.5) = \frac{7}{6} - \frac{13}{6} = -1$$

...

Семинар 3 (10.10.16) «Численные методы решений трансцендентных и алгебраических уравнений. Метод касательных (метод Ньютона).»

Уравнение касательной $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

В точке пересечения графика касательной с осью x ордината касательной $y = 0$:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0)$$

$$f'(x_0)(x_1 - x_0) = -f(x_0)$$

$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Пример 1

Дано

1. $x^3 - kx - L = 0$

2. $k = 20$

3. $L = 10$

Рекомендуемый план решения

1. Находятся первая и вторая производные

$$f'(x) = 3x^2 - k$$

$$f''(x) = 6x$$

2. Очевидно, что корни (если они существуют) расположены левее, между или правее точек экстремума функции. Для непрерывной функции максимум или минимум может иметь место только в тех точках, где производная или равна нулю, или не существует ($= \infty$).

$$x = \pm \sqrt{\frac{k}{3}} = \pm \frac{20}{3} = \pm 2.58$$

Задача нахождения корней уравнения $f(x) = 0$ делится на два этапа:

1. Локализация корня — нахождение интервала, на котором изолирован единственный нужный нам корень. Выбор интервала производится путём анализа знака $f(x)$ в ряде пробных точек.
2. Уточнение положения корня на интервале локализации

Свойства функции на интервале локализации (a, b) :

1. $f(x)$ непрерывна на (a, b)
2. $f(x)$ монотонна на (a, b)

Выберем интервал $(-5, -3)$

$$f'(x) = 3x^2 - 20$$

$$f'(a) = 3 \cdot 9 - 20 = 7 > 0$$

$$f'(b) = 3 \cdot 25 - 20 = 55 > 0$$

3. $f(x)$ меняет знак на (a, b)

$$f(a) = 27 - (-60) - 10 = 23 > 0$$

$$f(b) = -125 + 100 - 10 = -35 < 0$$

$$f(a) \cdot f(b) = f(-3) \cdot f(-5) < 0$$

4. $f(x)$ не имеет точек перегиба: необязательно, но для сходимости некоторых методов необходимо.

$$f''(x) > 0 \text{ или } f''(x) < 0$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(a) = 6 \cdot (-3) = -18 < 0$$

$$f''(b) = 6 \cdot (-5) = -30 < 0$$

Если функция имеет корень в точке своего локального, условие 3 не выполняется, однако оно необходимо для сходимости метода _____ хорд и секущих. Для сходимости метода секущих также необходимо выполнение условия 4.

Начальная точка выбирается из условия $c = \begin{cases} a, & \text{если } f(a) \cdot f''(a) > 0 \\ b, & \text{если } f(b) \cdot f''(b) > 0 \end{cases}$

$$a = -3; f(-3) \cdot f''(-3) = 23 \cdot (-18) < 0$$

$$b = -5; f(-5) \cdot f''(-5) = -35 \cdot (-30) = 1050 > 0$$

Выбираем $x_0 = -5$.

$$x_{n+1} = \varphi_k(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \text{формула для метода Ньютона}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -5 - \frac{-35}{55} = -4.36$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 4.36 - \frac{-5.8166}{37.1239} \approx -4.21$$

$$f(x_1) = (-4.3636)^3 - 20 - (-4.3636) = -5.8166$$

$$f'(x_1) = 3 \cdot (-4.3636)^2 - 20 = 37.1239$$

Метод итерации для уравнения $f(x) = 0$ рассмотрим на примере уравнения $f(x) = x^3 - 20x - 10$

$$x^3 = 20x + 10$$

$$x = \sqrt[3]{20x + 10}$$

$$y(x) = \sqrt[3]{20x + 10}$$

Выберем интервал $[3, 5]$. В качестве начального условия выберем $x_0 = 3$.

Свойства функции на интервале $[3, 5]$:

1. $f(x)$ непрерывна на $[3, 5]$
2. $f(x)$ монотонна на $[3, 5]$: $f'(x) > 0$ или $f'(x) < 0$, что обуславливает единственность корня

$$f'(3) = 3 \cdot 9 - 20 = 7 > 0$$

$$f'(5) = 3 \cdot 25 - 20 = 55 > 0$$

3. $f(x)$ меняет знак на $[a, b]$: $f(a) \cdot f(b) < 0$, что обуславливает существование корня

$$f(3) = 27 - 60 - 10 = -43 < 0$$

$$f(5) = 125 - 100 - 10 = 15 > 0$$

$$f(3) \cdot f(5) = -43 \cdot 15 < 0$$

4. Если $|\varphi'(x)| < 1$, то итерационный процесс сходится в точном значении

$$(a) \ x_{k+1} = \varphi(x)$$

$$(b) \varphi(x) = \sqrt[3]{20x + 10}$$

$$(c) \varphi'(x) = \frac{1}{3}(20x + 10)^{-\frac{2}{3}} \cdot 20 = \frac{20}{3\sqrt[3]{(20x+10)^2}}$$

$$(d) \varphi'(3) = \frac{20}{3\sqrt[3]{10^2}} = 0.3925 < 1$$

$$(e) \varphi'(5) = \frac{20}{3\sqrt[3]{110^2}} = 0.2903 < 1$$

$$(f) x_0 = 3$$

$$(g) x_1 = \varphi(x_0) = \sqrt[3]{20 \cdot 3 + 10} = 4.12$$

$$(h) x_2 = \varphi(x_1) = \sqrt[3]{20 \cdot 3.1212 + 10} = 4.52$$

Метод хорд Метод деления отрезка пополам имеет малую скорость сходимости, однако его можно улучшить, если использовать для следующего вычисления не середину отрезка, а то значение x , в котором даёт 0 линейная интерполяция между двумя известными значениями функции $f(x)$ противоположного знака. Геометрически способ эквивалентен замене кривой $y = f(x)$ хордой, проходящей через точки $A = f(a)$ и $B = f(b)$.

Рассмотрим два случая:

Первый случай: $f(a) < 0$

1. Проведём хорду, соединяющую две точки $x_0 = A$ и B и найдём точку x_1 — пересечение хорды с осью x .
2. Восстанавливаем перпендикуляр из точки x_1 до пересечения с кривой $f(x)$ (точка C)
3. Соединяем точку C с точкой B и найдём точку x_2 и т.д.
4. Последовательно приближаемся к корню x_*
5. Из подобия треугольников Aax_1 и Bbx_1 находим $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b)}{b-x_1} = \frac{f(a)}{a-x_1}$

$$(a) f'(b) = \frac{f(b)}{b-x_1} = \frac{f(a)}{a-x_1}$$

$$(b) a - x_1 = \frac{f(a)}{f'(b)}$$

$$(c) x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(b)}$$

$$(d) f'(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$(e) x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)$$

$$(f) x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b)-f(x_1)}$$

- (g) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b)-f(a)}$, где $n = 0, 1, \dots$ образует монотонную бесконечно возрастающую последовательность, причём $x_0 < x_1 < \dots < b$

Второй случай: $f(a) > 0$

1. Проведём хорду, соединяющую две точки A и $x_0 = B$ и найдём точку x_1 — пересечение хорды с осью x .
2. Восстанавливаем перпендикуляр из точки x_1 до пересечения с кривой $f(x)$ (точка C)
3. Соединяем точку C с точкой A и найдём точку x_2 и т.д.
4. Последовательно приближаемся к корню x_*
5. Из подобия треугольников Aax_1 и Bbx_1 находим $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b)}{b-x_1} = \frac{f(a)}{a-x_1}$

$$(a) \quad f'(a) = \frac{f(b)}{b-x_1} = \frac{f(a)}{a-x_1}$$

$$(b) \quad b - x_1 = \frac{f(b)}{f'(a)}$$

$$(c) \quad x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(a)}$$

$$(d) \quad f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$(e) \quad x_1 = b - \frac{f(b)}{f(b)-f(a)} \cdot (b - a)$$

$$(f) \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(a)}(x_1 - a)$$

$$(g) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n-a)}{f(x_n)-f(a)}$$

Свойства функции на интервале локализации (a, b) :

1. $f(x)$ непрерывна на (a, b)
2. $f(x)$ монотонна на (a, b)

Выберем интервал $(-3, -3)$

$$f'(x) = 3x^2 - 20$$

$$f'(a) = 3 \cdot 9 - 20 = 7 > 0$$

$$f'(b) = 3 \cdot 9 - 20 = 7 > 0$$

3. $f(x)$ меняет знак на (a, b)

$$f(a) = -27 + 60 - 10 = 23 > 0$$

$$f(b) = 27 - 60 - 10 = -43 < 0$$

$$f(a) \cdot f(b) = f(-3) \cdot f(3) < 0$$

4. $f(x)$ не имеет точек перегиба: необязательно, но для сходимости некоторых методов необходимо.

$$f''(x) > 0 \text{ или } f''(x) < 0$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(-3) = -18 < 0$$

$$f''(-0.01) = (-0.01)^3 - 20 \cdot (-0.01) - 10 = -9.800001 < 0$$

$$(a) \quad x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)} \cdot (b-a)$$

$$(b) \quad x_1 = (-0.01) - \frac{-9.800001}{23+9.800001}(-3+0.01) = -0.9$$

Пример 2

Методом итерации решить уравнение $x^5 + 5x - 1 = 0$ на интервале $[-0.5, 0.5]$ с точностью 10^{-3} .

Решение

1. $f(x)$ непрерывна на (a, b)

2. $f(x)$ монотонна на (a, b)

$$f'(x) = 5x^4 + 5$$

$$f'(-0.5) = f'(0.5) = 5 \cdot 0.5^4 + 5 > 0$$

3. $f(x)$ меняет знак на (a, b)

$$f(-0.5) = -0.5^5 + 5 \cdot (-0.5) - 1 < 0$$

$$f(0.5) = 0.5^5 + 5 \cdot 0.5 - 1 > 0$$

4. $f(x)$ не имеет точек перегиба: необязательно, но для сходимости некоторых методов необходимо.

Лекция (18.10.16)

2 Квадратура Гаусса и Чебышева

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_i^z A_i f(x_i) =$$

Определенный интеграл приблизительно равен среднему взвешенному значению подынтегральной функции, вычисленным в определенных точках промежутка интегрирования.

Квадратуры характеризуются равноотстоящим характером узлов с шагом h , а соответствующие веса A_i находились в результате подмены подынтегральной функции $f(x)$ кусочно-постоянной функцией для ..., кусочно-линейной функцией в случае формул трапеций, кусочно-квадратичной функцией в случае формул Симпсона. К примеру, у формулы трапеции набор весовых коэффициентов имеет следующий вид: $\frac{h}{2}; h; \dots; h; \frac{h}{2}$. Для формул Симпсона: $\frac{h}{3}; \frac{4h}{3}; \frac{2h}{3}; \frac{4h}{3}; \frac{2h}{3}; \dots; \frac{4h}{3}; \frac{h}{3}$.

Откажемся от равномерного распределения узлов x_i и будем искать их замену. Подстановка: $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$.

$$= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) dt$$

$$\tilde{I} = \int_{-1}^1 \varphi(y) dt \approx \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(t_i)$$

n ранее означало число элементарных отрезков, на которые разбивался интеграл. Для данной записи оно означает число кругов.

Те же остаточные члены позволяют сделать вывод о точности, т.к. в формулу остаточного члена производная подынтегральной функции k — го порядка, то можно сказать, что соответствующая квадратура точна для многочленов степени $k - 1$.

$k - 1$ это алгебраический порядок точности квадратурной формулы.

$$\int_{-1}^1 \varphi(t) dt \approx A \sum_{i=1}^n \varphi(t_i)$$

Формула Чебышева соответствует минимизации аппроксимации исходной функции $\varphi(t)$ в случае, если $\varphi(t)$ представляет собой нормально распределённую случайную величину.

Пусть $\varphi(x) \in \mathbb{P}^n = a_n x^n + \dots + a_0$. Тогда рассматриваемый случай сводится к

$$\begin{cases} t_1 + \dots + t_n = 0 \\ t_1^2 + \dots + t_n^2 = \frac{n}{3} \\ t_1^3 + \dots + t_n^3 = 0 \\ t_1^n + \dots + t_n^n = \frac{1+(-1)^n}{2} \frac{n}{n+1} \end{cases}$$

Доказано, что данная система уравнений с n неизвестными коэффициентами определяет единственный набор узлов t_i . Эта система не имеет решения для $n = 8$ и $n \geq 10$. Для полинома степени n существует n различных решений.

3 Вычисление несобственных интегралов

Интеграл вида $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ называется несобственным.

Для численного вычисления подобных интегралов применяется квадратура Гаусса. При этом:

$$1. \int_0^{\infty} f(x) dx \leftrightarrow \int_0^{\infty} e^{-x} e^x f(x) dx$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \leftrightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2} e^{x^2} f(x) dx$$

$$3. \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx =$$

$$(a) \quad b \leftrightarrow R_i$$

$$(b) \quad = \int_a^b f(x) dx$$

(c) Предполагается абсолютная сходимость интеграла.

4 Аппроксимация производных

Сложности:

1. Незнание аналитической вида дифференцируемых функций
2. Возможность значительного усложнения процедуры дифференцирования при точном понимании аналитического вида

Семинар (24.10.16)

Тема

Если известна первообразная функции $F(x)$, можно вычислять определенный интеграл. Но когда первообразная не выражается через элементарные функции, например для $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ или $f(x) = e^{-x^2}$ или выражения у $F(x)$ очень сложные, то используют приближенные формулы для вычисления определённого интеграла (квадратурные формулы).

Метод Ньютона-Котеза

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^b L_n(x)dx = \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} = \\ &= \sum_{i=1}^n y_i \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} dx = \sum_{i=1}^n y_i A_i \\ A_i &= \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} dx \\ H_i &= \frac{1}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq; (i = 0, 1, 2, \dots, n); q^{[n+1]} = q(q-1)\dots(q-n) \end{aligned}$$

Метод прямоугольников

Степень полинома $n = 0$; $P_0(x) = const$. Коэффициент Котеза при $n = 0$ (вычисляется как предельный переход при $n \rightarrow 0$) равен 1. Интервал $(x_0 \dots x_n)$ не определён, т.к. есть только одна точка x_0 . Геометрически это означает, что $f(x)$ заменяется на интервале каким-то значением ординаты. Если интервал (a, b) велик, то его разбивают точками x_i на n интервалов и на каждом применяют метод прямоугольников.

Для первого интервала приближенное значение интеграла равно $f(\tilde{x})(x_1 - x_0)$, $\tilde{x} \in [x_0, x_1]$

$$I_{л.п.} = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

$$I_{п.п.} = h \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

$$I_{с.п.} = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x + \frac{h}{2}) = h \sum_{i=1}^n f(x_i - \frac{h}{2})$$

Для $n = 4$:

$$I_{л.п.} = h(y_0 + y_1 + y_2 + y_3), \text{ где } y_i = y(x_i) = \frac{x_i + 0.6}{x_i^2 + ???}$$

$$x_i = 0, 2 + i \cdot h; i = 0, 1, 2, 3$$

$$h = (1, 6 - 0, 2)/4 = 0, 35$$

i	x_i	$x_i + 0.6$	$x_i^2 + x_i + 1$	y_0, y_1, y_3, y_4
0	0.2	0.8	1.24	0.64516
1	0.55	1.15	1.8525	0.62078
2	0.9	1.5	2.71	0.5535
3	1.25	1.85	3.8125	0.485246
Σ				2.304686

$$I = 0.35 \cdot 2.304686 = 0.80664$$

Метод правых прямоугольников $I_{п.п.} = h(y_1 + y_2 + y_3 + y_4); x_i = 0.55 + ih; i = 1, 2, 3, 4; h = (1.6 - 0.2)/4 = 0.35$

i	x_i	$x_i + 0.6$	$x_i^2 + x_i + 1$	y_1, y_2, y_3, y_4
1	0.55	1.15	1.8525	0.6278
2	0.9	1.5	2.71	0.5535
3	1.25	1.85	3.8125	0.485246
4	1.6	2.2	5.16	0.42636
Σ				2.085886

$$I = 0.35 \cdot 2.08558 = 0.83006$$

Метод средних прямоугольников $I_{с.п.} = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x + \frac{h}{2}); h \approx 0.35; \frac{h}{2} = 0.175$

i	x_i	$x_i + 0.6$	$x_i^2 + x_i + 1$	y_1, y_2, y_3, y_4
0	0.375	0.975	1.515625	0.643299
1	0.725	1.325	2.250625	0.588725
2	1.075	1.675	3.230625	0.5184755
3	1.425	2.025	4.455625	0.454482
Σ				2.204981165

$$I = 0.35 \cdot 2.2049811 = 0.771434$$

Метод трапеций

На частичном интервале функция заменяется линейной, т.е. $n = 1$.

$$H_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq; q^{[n+1]} = q(q-1)\dots(q-n)$$

$$H_i = \frac{(-1)^{q-i}}{i!(1-i)!} \int_0^1 \frac{q(q-1)}{q-1} dq$$

$$H_0 = - \int_0^1 \frac{q(q-1)}{q} dq = - \int_0^1 (q-1) dq = -(\frac{q^2}{2} - q)|_0^1 =$$

$$= -((\frac{1}{2} - 0) - (1 - 0)) = -(\frac{1}{2} - 1)^0 = -(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$H_1 = \int_0^1 \frac{q(q-1)}{q-1} dq = \frac{q^2}{2}|_0^1 = \frac{1}{2}$$

На интервале $|x_i, x_{i+1}|$, получим $I = h(f_i + f_{i+1})/2$, т.е. площадь криволинейной трапеции заменена площадью прямоугольной трапеции. Суммируя по всем интервалам, приходим к выражению $I_{\text{тр}} = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f_i + f_{i+1})$. Окончательно получим $I_{\text{тр}} = (\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(i)) \cdot h$.

$$a = (K - L)/2 = (1 - 0.6)/2 = 0.2$$

$$b = (K + L) = 1 + 0.6 = 1.6$$

$$I = \int_{0.2}^{1.6} \frac{x+0.6}{x^2+x+1} dx$$

Для $n = 4$:

$$I_{\text{тр}} = (\frac{y_0+y_4}{2} + y_1 + y_2 + y_3) \cdot h, \text{ где } x_i = 0.2 + h, i = 0, 1, 2, 3, 4$$

i	x_i	$x_i + 0.6$	$x_i^2 + x_i + 1$	y_0, y_4	y_1, y_2, y_3
0	0.2	0.8	1.24	0.64516	
1	0.5	1.15	1.8525		0.68078
2	0.9	1.5	2.71		0.5535
3	1.25	1.85	3.8125		0.485246
4	1.6	2.2	5.16	0.42636	
$\sum$				1.07152	1.659526

$$I = (1.07152/2 + 1.659526) \cdot 0.35 = 0.76835$$

Семинар (07.11.16)

Квадратурная формула Гаусса

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], (n = 0, 1, \dots)$$

Важнейшие свойства полинома Лежандра:

1. $P_n(1) = 1$; $P_n(-1) = (-1)^n$; ($n = 0, 1, \dots$)
2. $\int_{-1}^1 P_n(x) \cdot Q_k(x) dx = 0$ ($k < n$), где $Q_k(x)$ — любой полином степени $< k$
3. $P_n(x)$ имеет n различных и действительных корней, которые расположены на интервале $[-1; 1]$

Первые 5 полиномов Лежандра

1. $P_0(x) = 1$
2. $P_1(x) = x$
3. $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
4. $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
5. $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

Вывод квадратурной формулы Гаусса

Рассмотрим функцию $y = f(t)$, заданную на стандартном интервале $[-1; 1]$. Общий случай легко свести к частному путём линейной замены независимой переменной.

Поставим задачу, как нужно подобрать точки $t_1, t_2, \dots, t_n$ и коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_n$ так, чтобы квадратурная формула $\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i)$ была точной для всех полиномов $f(t)$ наивысшей возможной степени наивысшей возможной степени N .

Так как в нашем распоряжении имеется $2n$ постоянных t_i и A_i ($i = 1, 2, \dots, n$), а полином степени $2n - 1$ определяется $2n$ коэффициентами, то эта наивысшая степень в общем случае равна $N = 2n - 1$.

Для обеспечения равенства $\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i)$ необходимо и достаточно, чтобы оно было верно при $f(x) = 1, t, t^2, \dots, t^{2n-1}$. Полагая $\int_{-1}^1 t^k dt = \sum_{i=1}^n A_i t_i^k$ ($k = 0, 1, \dots, 2n - 1$) и $f(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} c_k t^k$ будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(t) dt &= \sum_{k=0}^{2n-1} c_k \int_{-1}^1 t^k dt = \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} c_k \sum_{i=1}^n A_i t_i^k = \sum_{i=1}^n A_i \sum_{k=0}^{2n-1} c_k t_i^k = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i) \end{aligned}$$

Учитывая соотношение $\int_{-1}^1 t^k dt = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} \frac{2}{k+1} & \text{при } k \text{ четном} \\ 0 & \text{при } k \text{ нечетном} \end{cases} =$
 $\sum_{i=1}^n A_i f(t_i)$, заключаем, что для решения поставленной задачи достаточно определить t_i и A_i из системы $2n$ уравнений.

Система (3):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n A_i = 2 \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-2} = \frac{2}{2n-1} \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-1} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) нелинейна и решение её представляет большие математические сложности. Однако, здесь можно применить следующий искусственный приём: Рассмотрим $f(t) = t^k P_n(t)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), где $P_n(t)$ — полином Лежандра. Так как степени этих полиномов не превышают $2n-1$, то на основании системы (3) для них должна быть справедлива формула $\int_{-1}^1 t^k P_n(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i t_i^k P_n(t_i)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). С другой стороны, в силу свойства ортогональности полиномов Лежандра (свойство 2), выполнены равенства: $\int_{-1}^1 t^k P_n(t) dt = 0$ при $k < n$, поэтому $\sum_{i=1}^n A_i t_i^k P_n(t_i) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$).

То есть для достижения наивысшей степени квадратурной формулы, в качестве точек t_i достаточно взять нули соответствующего полинома Лежандра. Как известно (свойство 3), эти нули действительны, различны и расположены на интервале $[-1, 1]$. Зная абсциссы t_i легко можно найти из линейной системы первых n уравнений системы (3) коэффициенты A_i ($i = 1, \dots, n$). $D = \prod_{i>j} (t_i - t_j) \neq 0$, следовательно A_i определяется однозначно.

Формула $\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i)$, где t_i — нули полинома Лежандра, а A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) определяются системой (3) называется **квадратурной формулой Гаусса**.

Пример 1

Вывести квадратурную формулу Гаусса для случая трёх ординат ($N = 3$).

Решение Полином Лежандра 3 степени: $P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$.

Приравнявая этот полином нулю, находим t_i :

$$1. \ t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \approx -0,74597$$

$$2. \ t_2 = 0,774597$$

$$3. t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0,774597$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 2 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}}A_1 + \sqrt{\frac{3}{5}}A_3 = 0 \\ \frac{3}{5}A_1 + \frac{3}{5}A_3 = \frac{2}{3} \end{cases}, A_1 = A_3 = \frac{5}{9}, A_2 = \frac{8}{9}$$

$$\int_{-1}^1 f(t)dt = \frac{1}{9}[5f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{\frac{3}{5}})]$$

Рассмотрим использование квадратурной формулы Гаусса для вычисления общего интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Делая замену переменной $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$, получаем $\int_{-1}^1 f(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t)dt$. Применяя к последнему интегралу квадратурную формулу Гаусса получим $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$, где $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$), t_i — нули полиному Лежандра ($P_n(t_i) = 0$).

Пример 2 Вычислить интеграл $I = \int_{0.2}^{1.6} \frac{x+0.6}{x^2+x+1} dx$, применяя квадратурную формулу Гаусса с тремя ординатами.

Решение

$$1. x_1 = 0.9 + 0.7 \cdot (-0.7745) = 0.3578$$

$$2. x_2 = 0.9 + 0.7 \cdot 0 = 0.9$$

$$3. x_3 = 0.9 + 0.7 \cdot 0.7745 = 1.44219$$

t	1	2	3	Σ
t_i	-0.774596	0	0.774596	
x_i	0.357808	0.9	1.4421917	
$x_i + 0.6$	0.957808	1.5	2.0421917	
$x_i^2 + x_i + 1$	1.485834	2.71	4.5221688	
$f(x_i)$	0.644626	0.553505	0.4516016	
A_i	0.555555	0.888888	0.555555	
$A_i f(x_i)$	0.35812569	0.492049	0.2508898	1.1010204

$$0.7 \cdot 1.10102041 = 0.770714 \text{ — ответ}$$

Численные методы линейной алгебры

Метод Гаусса (метод исключений): Последовательно в уравнениях, начиная с первого, выделяется ведущий элемент, на который производится деление. В случае необходимости строки и столбцы переставляются.

Рассмотрим систему из трёх уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34} \end{cases} \quad (2.1)$$

Прямой ход (шаг 1). Пусть $a_{11} \neq 0$ (ведущий элемент). Разделив первое уравнение системы на a_{11} получим: $x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = b_{14}$, где $b_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{11}}$ ($j = 2, 3, 4$).

Пользуясь уравнением (2.2) можно исключить неизвестные x_1 из второго и третьего уравнения системы (2.1). Для этого следует умножить уравнение (2.2) на a_{21} и a_{31} и вычесть результаты, соответственно, из 2 или 3 уравнения системы. В результате получим систему трёх уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = b_{14} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = a_{24}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = a_{34}^{(1)} \end{cases}$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} \cdot b_{1j} \quad (i = 2, 3; j = 2, 3, 4).$$

Шаг 2. Выберем $a_{22}^{(1)}$ в качестве ведущего элемента (при необходимости, строки или столбцы переставляются). На него делится вторая строка, а все остальные элементы преобразуются по формуле $b_{2j}^{(1)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (j = 3, 4)$. $x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 = b_{24}^{(1)}$.

Исключая теперь x_2 также, как мы исключали x_1 , получим уравнение $a_{33}^{(2)}x_3 = a_{34}^{(2)}$, $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} \cdot b_{2j}^{(1)}$, ($i = 3, j = 3, 4$).

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = b_{14} \\ x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 = b_{24}^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 = a_{34}^{(2)} \end{cases}$$

Обратный ход: Последовательно находим

$$1. x_3 = \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$$

$$2. x_2 = b_{24}^{(1)} - b_{23}^{(1)}x_3$$

$$3. x_1 = b_{14} - b_{13}x_3 - b_{12}x_2$$

Пример 3
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 = 7 \\ -4x_3 = -12 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Семинар (21.11.16)

	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	$\sum = a_{i5}$
I	1	1	1	-1	0	1
	2	2	1	1	7	11
	3	1	1	1	2	3
		1	1	-1	0	1
II	2		1	3	7	9
	3		-2	2	2	2
			1	-3	-7	-9
III	3			-4	-12	-16
IV				1	3	4
			1		2	3
		1			1	2

Пример 2 Решить систему линейных алгебраических уравнений (Слау) методом Гаусса с выбором главного элемента.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 4 + 1 = 5 \\ x_2 = -7 + 3 = -4 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

	i	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	$\sum = a_{i5}$
I	1	$\frac{1}{2}$	1	1	-1	0	1
	2	-	2	1	1	7	11
	3	$\frac{1}{2}$	1	-1	1	2	3
II	1			$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{9}{2}$
	-			-	-	-	-16
	3			$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$
III	1				-4	-12	-16
IV	1				1	3	4
	2			1		2	3
	3		1			1	2

К прямым методом решения Слау относится метод ортогонализации.

Ортогонализация матриц

Дана матрица с действительными элементами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Столбцы матрицы A будем рассматривать как векторы $\vec{a}^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

$A = [\vec{a}_1 | \vec{a}_2 | \dots | \vec{a}_n]$, где $\vec{a}_i$ линейно независимы.

Теорема Всякую действительную неособенную матрицу A можно представить в виде произведения матрицы с ортогональными столбцами на верхнюю треугольную матрицу. $A = RT$, где R — матрица с ортогональными столбцами, T — верхняя треугольная матрица с единичной диагональю.

Доказательство Рассмотрим матрицу при $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Запишем эту матрицу в виде

$$A = [\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3], \text{ где } \vec{a}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{pmatrix}$$

$$t_{12} = \frac{(\vec{a}_2, \vec{r}_1)}{(\vec{r}_1, \vec{r}_1)}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_2 &= \vec{a}_2 - t_{12} \cdot \vec{r}_1 \\
 t_{13} &= \frac{(\vec{a}_3, \vec{r}_1)}{(\vec{r}_1, \vec{r}_1)} \\
 t_{23} &= \frac{(\vec{a}_3, \vec{r}_2)}{(\vec{r}_2, \vec{r}_2)} \\
 \vec{r}_3 &= \vec{a}_3 - t_{13} \cdot \vec{r}_1 - t_{23} \cdot \vec{r}_2 \\
 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} \\ 0 & 1 & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Пример 3 Ортогонализировать столбцы в матрице

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Положим $\vec{r}_1 = [1, 2, 1] = \vec{a}_1$

$$t_{12} = \frac{(\vec{a}_2, \vec{r}_1)}{(\vec{r}_1, \vec{r}_1)} = \frac{1+2-1}{1+4+1} = \frac{1}{3}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{a}_2 - t_{12}\vec{r}_1 = [1, 1, -1] - \frac{1}{3}[1, 2, 1] = [1, 1, -1] - [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}] = [\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}]$$

$$t_{13} = \frac{(\vec{a}_3, \vec{r}_1)}{(\vec{r}_1, \vec{r}_1)} = \frac{-1+2+1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$t_{23} = \frac{(\vec{a}_2, \vec{r}_2)}{(\vec{r}_2, \vec{r}_2)} = \frac{-\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{4}{3}}{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{16}{9}} = -\frac{5}{7}$$

$$\vec{r}_3 = \vec{a}_3 - t_{13}\vec{r}_1 - t_{23} \cdot \vec{r}_2 = [-1, 1, 1] - \frac{1}{3}[1, 2, 1] + \frac{5}{7}[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}] = [-\frac{6}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{3}{7}]$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{6}{7} \\ 2 & \frac{1}{3} & \frac{4}{7} \\ 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{7} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Итерационные методы решения Слау

Метод простых итераций

Пример 1 Решить систему уравнений.

На главной диагонали матрицы располагаются наибольшие по модулю элементы строки. $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|$

$$\begin{cases} 5x_1 + 0.12x_2 + 0.09x_3 = 10 \\ 0.08x_1 + 4x_2 - 0.15x_3 = 20 \\ 0.18x_1 - 0.06x_2 + 3x_3 = -4.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 2 - 0.024x_2^{(k)} - 0.018x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 50.02x_1^{(k)} + 0.03x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = -1.5 - 0.06x_1^{(k)} - 0.02x_2^{(k)} \end{cases}$$

Приведём матрицу к ортогональному виду

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0.024x_2 - 0.018x_3 \\ x_2 = 5 - 0.02x_1 + 0.03x_3 \\ x_3 = -1.5 - 0.06x_1 + 0.02x_2 \end{cases}$$

$x^{(0)} = (2, 5, -1.5)$ — первое приближение

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -2 - 0.024 \cdot 5 - 0.018 \cdot (-1.5) = 1.907 \\ x_2^{(1)} = 5 - 0.02 \cdot 2 + 0.03 \cdot (-1.5) = 4.915 \\ x_3^{(1)} = -1.5 - 0.06 \cdot 2 + 0.02 \cdot 5 = -1.52 \end{cases}$$

$$x^{(1)} = (1.907, 4.915, -1.52)$$

$$x^{(2)} = (1.909, 4.916, -1.516)$$

$$x^{(3)} = (1.909, 4.916, -1.516)$$

С точностью до 10^{-3} решением системы является вектор $x^{(3)}$.

$$\text{Точное решение системы} \quad \begin{cases} 5x_1 + 0.12x_2 + 0.09x_3 = 10 \\ 0.08x_1 + 4x_2 - 0.15x_3 = 20 \\ 0.18x_1 - 0.06x_2 + 3x_3 = -4.5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1.909577 \\ x_2 = 4.90494 \\ x_3 = -1.51647 \end{cases}$$

Метод Зейдера

Лекция (22.11.16)

5 Численное решение дифференциальных уравнений

5.1 Метод изоклин

Линия L называется **изоклиной**, если вдоль этой линии поле направлений дифференциального уравнения постоянно.

Для построения интегральных кривых проводится линия так, чтобы поле направлений касалось её.

Из всевозможных изоклин выделяют нулевую — **линию экстремума**.

$$1. \quad y' = 1 - x^2 - y^2$$

$$2. \quad y'' = 0$$

$$3. \quad y'' = -2x - 2yy' = 0$$

$$4. -2x - 2y(1 - x^2y^2) = 0$$

Все методы численного решения следуют из метода Эйлера (метод ломанных кривых).

Пусть $y' = f(x; y); y(x_0) = y_0$

Найти Наборы точек, удовлетворяющие задаче Коши.

Решение Воспользуемся геометрическим смыслом дифференциального уравнения

$$\operatorname{tg} \varphi_i = f(x_i, y_i)$$

$$\Delta y_i = h + g y_i = h f(x; y)$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y = y_i + h f(x; y)$$

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + h f(x_i; y_i) \end{cases}$$

При малом шаге h и большом числе точек M методом Эйлера можно пользоваться только если число точек велико, но даже при малом h ошибка $\varepsilon \approx hn$.

Рассмотрим задачу Коши. Решение состоит из двух шагов:

$$1. A : \begin{cases} x_a = x_i + \frac{R}{2} \\ y_a = y_i + \frac{h}{2} f(x, y) \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + h f(A) \end{cases}$$

$$3. \forall i : \begin{cases} x_{i+1} = x_i + l \\ y_{i+1} = y_i + h f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x, y)) \end{cases}$$

Улучшенный метод Эйлера даёт большую точность, т.к. учитывает наклон интегральной кривой в середине отрезка. Если h — достаточно малая величина, то для любого отрезка може быть получено решение улучшенным методом Эйлера с достаточной точностью.

Семинар (05.12.16)

Нахождение собственных значений и собственных векторов матриц

Для нахождения собственных значений необходимо решить уравнение $|A - E\lambda| = 0$.

Пример Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{y}_1 = A \cdot \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

СЛАУ имеет вид: $d_1 \vec{y}_1 + d_2 \vec{y}_2 = -\vec{y}_2$

$$\vec{y}_2 = A \cdot \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d_1 + d_2 = -1$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = 1; 4$$

Построим полиномы для нахождения собственных векторов.

$$R_1(\lambda) = \lambda - 4$$

$$R_2(\lambda) = \lambda - 1$$

$$\vec{x}_1 = \vec{y}_1 - 4\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \vec{y}_1 - \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 \vec{x}_2 = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Численные методы решения обыкновенных диф. уравнений (ОДУ)

$y' = f(x; y)$, где $f(x; y)$ — некоторая заданная в общем случае функция двух переменных.

Будем считать, что для данной задачи, называемой начальной задачей или задачей Коши выполняется требование, обеспечивающее существование и единственность на отрезке $[x_0, b]$ её решение $y = y(x)$

Приближенные способы решения начально задачи для ОДУ:

1. Приближенно-аналитические методы
2. Графические или машинно-графические методы
3. Численные методы

Метод Коши-Эйлера (квадратурный способ)

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

При $x = x_1$

$$y(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x)) dx$$

Применив к этому интегралу простейшую формулу левых треугольников получим: $y(x_1) \approx y_0 + f(x_0, y(x_0))(x_1 - x_0)$

$$\text{Расчётная формула метода Эйлера } y(x_{i+1} - y(x_i)) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}); i = 0, 1, \dots, n$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$$

Рассмотрим комбинированный метод явного метода Эйлера и неявного метода трапеций.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h \cdot f(x_i, y_i)))$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Пример $y' = x^2 + y; y(0) = 2; [0; 2]; h = 0.5$

$$y'(x_0) = 2; x_1 = 0.5; y_1 = 3$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 2 + 0.5 \cdot 2 = 3$$

$$f(x_1, y_1) = 0.25 + 3 = 3.25$$

$$y_1 = y_0 + 0.25(f(x_0, y_0) + f(x_0 + 0.5, y_0 + 0.5 \cdot f(x_0, y_0))) = 2 + 0.25(2 + 3.25) = 3.3125$$

$$f(x_0 + 0.5, y_0 + 0.5 \cdot f(x_0, y_0)) = f(0.5, 3) = 0.25 + 3 = 3.25$$

$$x_2 = x_1 + h = 1; y_1 = 3.3125$$

$$y_2 = y_1 + 0.25 \cdot f(x_1, y_1) + f(x_1 + h, y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)) = 5.09375$$

$$f(x_1, y_1) = 0.25 + 3.3125 = 3.5625$$

$$y_2 = 3.3125 + 0.25(3.5625 + f(1.33125 + 0.5 \cdot 3.5625)) = 5.726562$$

$$\text{Ответ: } y_0 = 2; y_1 = 3.3125; y_2 = 5.72656; y_3 = 10.2432; y_4 = 18.4889$$

Лекция (6.12.2016)

Контрольная работа №1

Задание 1 (вариант 1) Показать, что предельная и абсолютная погрешности суммы или разности равна сумме или разности предельных абсолютных погрешностей до члена второго порядка малости.

Пусть A — точное значение некоторой величины, а a — наилучшее из известных приближений. В этом случае ошибка (или погрешность) приближения a определяется разностью $A - a$. Обычно, знак этой ошибки не имеет решающего значения, поэтому рассматривают абсолютную величину ошибки $e_a = |A - a|$.

Величина e_a называется **абсолютной погрешностью** приближенного значения a . В большинстве случаев остаётся неизвестной, т.к. для её вычисления нужно точное значение A . На практике применяют равенство $\Delta a = |A - a|$. Число Δa называют **предельной абсолютной погрешностью** (или границей абсолютной погрешности) приближения a .

Абсолютная погрешность алгебраической суммы приближённых значений не превышает суммы абсолютных погрешностей этих значений.

Пусть $S = X + Y$ — сумма точных чисел, среди которых могут быть как положительные, так и отрицательные, а $s = x + y$ — сумма приближений. Составим разность $S - s = (X - x) + (Y - y)$; $|S - s| \leq |X - x| + |Y - y|$, т.е. $e_s \leq e_x + e_y$ или тем более $e_s \leq \Delta x + \Delta y$, откуда следует, что нужно принять $\Delta s = \Delta x + \Delta y$, т.е. предельной абсолютной погрешностью суммы можно считать сумму предельных абсолютных погрешностей слагаемых.

Для разности $e_s \leq \Delta x - \Delta y$, т.е. предельной абсолютной погрешностью разности можно считать разность предельных абсолютных погрешностей вычитаемых.

Пример 1 Даны приближенные вычисления $x = 18.437$; $y = 24.9$, у которых все цифры являются верными.

$$\text{Найдём сумму } S = X + Y = 18.437 + 24.9 = 43.337.$$

Для оценки точности результата вычислим сумму погрешностей слагаемых $10^{-3} + 10^{-1} = 0.101$

$$\text{Округляем значение } 18.437 \approx 18.4$$

$$s = 18.4 + 24.9 = 43.3$$

$$10^{-1} + 10^{-1} = 0.2$$

2-й порядок точности

$$s = 18.44 + 24.9 = 43.34$$

$$10^{-2} + 10^{-2} = 0.02 = \Delta s$$

Задание 1 (вариант 2) Показать, что предельная относительная погрешность произведения или частного равна сумме предельных относительных погрешностей с точностью до члена второго порядка малости.

Предельной относительной погрешностью (или границей относительной погрешности) δ_x приближённого числа называется отношение предельной абсолютной погрешности Δx к абсолютному значению приближения $|x|$ $\delta_x = \frac{\Delta x}{|x|}$.

Пусть $p = x \cdot y$, а $q = x/y$. Знаки чисел x и y не влияют на величину ошибки, поэтому для простоты примем $x, y > 0$.

$$\ln p = \ln x + \ln y; \ln q = \ln x - \ln y$$

Принимая во внимание, что $\Delta s = \Delta x + \Delta y$, а также используя приближённую формулу, получим $\delta(x \cdot y) = \delta(x/y) = \delta x + \delta y$, т.е. предельной относительной погрешностью произведения (частного) можно считать сумму предельных относительных погрешностей сомножителей.

Задание 2 Найти абсолютную и предельную погрешность вычисления произведения для функции $u = \ln(2 + t)$

$$\Delta(\ln x) = |(\ln x)'| \Delta x = \frac{\Delta x}{x}, x > 0$$

$$\Delta(\ln(2 + t)) = |(\ln(2 + t))'| \Delta t = |\ln(2 + t)| \cdot 0.1 = 0.0333$$

$$P = 0.0333$$

Задание 3 С каким шагом нужно составить таблицу значений функции $y = f(x)$, чтобы при использовании линейной интерполяции погрешность не превосходила 0.001?

Вариант 1 $f(x) = \sin x$

Интерполирование может применяться для уплотнения таблицы задания функции, т.е. вычисления по исходной таблице новой таблицы с большим числом значений аргумента на прежнем участке его изменения. Эту операцию называют субтабулированием функции.

x	$\sin x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0.150	0.14944	0.00494	0.00000	-0.00001
0.155	0.15438	0.00494	0.00001	0.00001
0.160	0.15932	0.00493	0.00000	
0.165	0.16425	0.00493		
0.170	0.16918			

$y(x) = y(x_0) + q \cdot y(x_0)$, где $q = \frac{x-x_0}{h}a$, $x_0 = 0.15$

$y(x_0) = -0.14944$

$h = 0.005$

$h = 0.001$

$q = \frac{0.151-0.15}{0.005} = 0.2$

$\sin(0.151) = 0.14944 + 0.2 \cdot 0.00494 = 0.150428$

$q = \frac{0.152-0.15}{0.005} = 0.4$

$\sin(0.152) = 0.14944 + 0.4 \cdot 0.00494 = 0.151416$

$\sin(0.153) = 0.14944 + 0.6 \cdot 0.00494 = 0.152404$

$\sin(0.154) = 0.14944 + 0.8 \cdot 0.00494 = 0.153392$

$\sin(0.155) = 0.14944 + 1 \cdot 0.00494 = 0.15438$

Вариант 2 $f(x) = \ln(x)$

Задание 4 Для функции, заданной таблично вычислить значение определённого интеграла методом трапеции и сравнить с вычислениями по методу Симпсона. $x = 0, 2$, шаг 0.25.

Вариант 1 $f(x) = \overline{0, 2}$

$I_{\text{тр}} = (\frac{y_0+y_8}{2} + y_1 + \dots + y_7) \cdot h = 0.25$

i	x_i	y_0, y_8	$y_1, \dots, y_7$
0	0	1	
1	0.25		0.989616
2	0.5		0.958851
3	0.75		0.908852
4	1		0.841472
5	1.25		0.759188
6	1.5		0.664997
7	1.75		0.562278
8	2	0.454649	
Σ		1.454649	

$I_C = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + y_8) = 1.605354$

