Часть I

Лекция 1 (08.02.16)

1. Преподаватель: Руденская Ирина Николаевна
2. Информация о семестре:
   (a) В конце семестра экзамен
   (b) Две контрольные (потоковые)
   (c) Типовой расчет
   (d) Две зачтенные контрольные + типовой расчет — бонусы на экзамене
3. Список литературы:
   (a) Письменный — Курс по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам
   (b) Гмурман В.И. — Теория вероятностей; Руководство к решению задач по теории вероятностей
   (c) Феллер — Теория вероятностей

1 Определение вероятности

1. **Случайным опытом** назовем опыт, результат которого не вполне однозначно определен.
   (a) Результат случайного опыта назовем **случайным событием** (A, B, C).
2. Предположим, что опыт выполняется n раз. Тогда:
   (a) μ_A — частота появления события A
   (b) $\frac{\mu_A}{n}$ — относительная частота появления события A
   (c) $\frac{\mu_A}{n} \approx 0.5$
3. Статистическое определение вероятности: Если событие A обладает свойством **статистической устойчивости** (относительная частота его, при большом n, колеблется около определенного числа), то это число можно назвать **вероятностью** события A.

4. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ — множество вероятных исходов опыта
   (a) ω_i — всевозможные, равновозможные, взаимоисключающие исходы опыта.
   (b) $A = \{\omega_{i1}, \omega_{i2}, ..., \omega_{im}\}$
      i. ω_{ij} — благоприятные исходы (при которых событие A обязательно произойдет)
5. Классическое определение вероятности: $P(A) = \frac{m}{n}$ — вероятность события A
   (a) m — число благоприятных исходов
   (b) n — число всевозможных исходов

1.1 Операции над событиями и классификация событий

1. A — **достоверное событие**, если при данных условиях оно обязательно произойдет. ($P(A) = 1$)
2. A — **невозможное событие**, если при данных условиях оно никак не произойдет. ($P(A) = 0$)
3. A — **случайное событие**, если оно может произойти или не произойти. ($0 < P(A) < 1$)
4. Операции:
   (a) Сумма событий ($A + B$, A∪B, «ИЛИ»)
   (b) Произведение событий (AB, $A \cap B$, «И»)
   (c) Отрицание события ($\overline{A}$, «НЕ»)
   (d) Вычитание событий ($A \backslash B$) — элементы A, которые не входят в B
5. Свойства операций:
   (a) Коммутативность: $A + B = B + A$
   (b) Ассоциативность: $(A + B) + C = A + (B + C)$
   (c) Дистрибутивность: $(A + B)C = AC + BC$
   (d) Двойное отрицание: $\overline{\overline{A}} = A$
   (e) Законы де Моргана: $\overline{A + B} = \overline{A} * \overline{B}$; $\overline{A * B} = \overline{A} + \overline{B}$

   (f) $A + \emptyset = A$, $A\emptyset = \emptyset$, $A + \Omega = \Omega$, $A + \overline{A} = \Omega$, $A\Omega = A$, $A\overline{A} = \emptyset$

6. Пример 1: Два стрелка произоводят по два выстрела.
   (a) A_1 — попадание первого стрелка
   (b) A_2 — попадание второго стрелка
   (c) $A = A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2$ — попадание **одного** стрелка

7. A и B **не совместны**, если появление A исключает появление события B и наоборот. ($AB = \emptyset$)

8. $A_1, A_2, ..., A_n$ составляют **полную группу**, если в данных условиях хотя-бы одно из них обязательно произойдет. ($\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$)

9. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ — равновероятные, несовместные события, образующие полную группу.

10. Свойства вероятностей:
   (a) $P(A) \geq 0$
   (b) $P(\Omega) = 1$
   (c) $P(A) \leq 1$
   (d) Если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B) \implies P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

11. $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$, ω_i — несовместное событие, образующее полную группу
   (a) $\omega_i \to p(\omega_i) = p_i > 0$: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
   (b) p: $A \to [0, 1]$
   (c) **Вероятноять** события A: $p(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i)$

1.2 Элементы комбинаторики

1. Принципы:
   (a) Принцип сложения: Если объект A выбирается n способами, а объект B — m другими способами, то $A + B$ выбирается $m + n$ способами
   (b) Принцип умножения: Если объект A выбирается n способами и после выбора A выбирается объект B — m другими способами, то AB выбирается mn способами.

2. Перестановки из n элементов — упорядоченные множества из n элементов $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$; $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{l})^n$

   (a) Пример 1: Собрание сочинений из 5 книг случайно выставляется на полке. Найти вероятность того, что книги расставятся по порядку.

      i. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{P_5} = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$

   (b) Пример 2: За круглым столом рассаживаются 10 человек. Найти вероятность того, что два определенных человека окажутся рядом.

      i. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{20 \cdot 8!}{10!} = \frac{20}{9 \cdot 10} = \frac{2}{9}$

3. Сочетание из n элементов по m — различные <u>неупорядоченные</u> n-элементные подмножества множества из m элементов.

   (a) $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ — число сочетаний

   (b) Пример 3: В группе 20 человек, 15 мальчиков, 5 девочек. Расчитать количество возможных пар.

      i. м + д $= 15 \cdot 5 = 75$

      ii. м + м $= C_{15}^2 = \frac{15!}{2!13!} = 15 \cdot 7 = 105$

      iii. Всего: $75 + 105 = 180$

4. Размещение из n элементов по m — различные <u>упорядоченные</u> n-элементные подмножества множества из m элементов.

   (a) $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = C_n^m P_m$

   (b) Пример 4: Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4 (цифры не повторяются)?

      i. $A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$

   (c) Пример 5: Человек забыл три цифры телефонного номера и набрал их наугад. Найти вероятность того, что номер набран правильно, если а) цифры не повторяются, б) цифры могут повторяться.

      i. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_{10}^3} = \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 8}$

      ii. $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{10^3}$

1.2.1 Задача о выборке (ТР №1)

1. Постановка задачи:
   (a) Имеется N элементов, из которых M с каким-то признаком
   (b) Случайным образом выбираются K элементов
   (c) Найти вероятность, что среди них L элементов с этим признаком
2. Решение: $P(A) = \frac{C_M^L C_{N-M}^{K-L}}{C_N^K}$
3. Пример 1: Из 36 карт сдается 5. Найти вероятность, что будут а) 2 короля и 2 дамы, б) хотя бы 1туз.
   (a) $P(A) = \frac{C_4^2 C_4^2 C_{28}^1}{C_{36}^5} = \frac{1}{374}$
   (b) Перейдем к $\overline{B}$ — ни одного туза
      i. $P(\overline{B}) = \frac{C_4^0 C_{32}^5}{C_{36}^5}$
      ii. $P(B) = 1 - P(\overline{B}) \approx 0,47$
4. $C_n^n = C_n^0 = 1$
5. $C_n^{n-1} = C_n^1 = n$
6. $0! = 1$

Часть II

Семинар 1 (12.02.16)

1. Преподаватель: Кузнецова Екатерина Юрьевна
2. Информация о семестре:
   (a) Потоковые контрольные
   (b) Типовой расчет
3. $P = \frac{m}{n}$ — вероятность события
   (a) m — благоприятные исходы

   (b) n — всевозможные исходы

4. Примеры:

   (a) Карточки поодписаны от 1 до 10. Вытаскивается карточка. Расчитать вероятность того, то число кратно 5.

      i. $P = \frac{6}{30}$

   (b) Два кубика. Вероятность, что выпадет сумма в 9 очков.

      i. $P = \frac{4}{36}$

   (c) Бросают две монеты.

      i. Вероятность, что выпадет две решки: $P = \frac{1}{4}$

      ii. Вероятность, что выпадет хотя-бы одна решка: $P = \frac{3}{4}$

   (d) Вероятность того, что в двузначном числе будут две одинаковых цифры: $P = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$

   (e) «Дифференциал» — вероятность того, что выбранная буква - гласная: $P = \frac{5}{12}$

   (f) Два кубика. Что вероятнее: сумма 7 или 8?

      i. $P_7 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

      ii. $P_8 = \frac{5}{36}$

      iii. Вероятнее получить в сумме 7

5. Формулы комбинаторики:

   (a) $P_n = n!$ — количество перестановок множества из n элементов

   (b) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний (неупорядоченных)

   (c) $A_n^k = k!C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ — число размещений (порядок учитывается)

6. Примеры:

   (a) В коробке 6 пронумерованных карточек. Какова вероятность, что карточки будут выбраны в правильном порядке?

      i. $P = \frac{1}{P_6} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$

   (b) Сколькими способами можно выбрать три лица на три должности из 10 кандидатов?

      i. $P = \frac{A_{10}^3 P_3}{P_{10}}$

(c) Круглый стол. Группа из 8 человек. Какая вероятность того, что 2 человека окажутся рядом?

i. $P = \frac{8 \cdot 2 \cdot P_6}{P_8}$

(d) Прямой стол. Группа из 8 человек. Какая вероятность того, что 2 человека окажутся рядом?

i. $P = \frac{7 \cdot 2 \cdot P_6}{P_8}$

(e) 12 студентов. Двое занимают очередь. Какова вероятность, что между ними 5 человек?

i. $P = \frac{6 \cdot 2 \cdot P_{10}}{P_{12}} = \frac{1}{11}$

(f) 5 пронумерованных карточек. Какова вероятность комбинации 1,2,3?

i. $P = \frac{1}{A_5^3} = \frac{2!}{5!} = \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{60}$

(g) 5 пронумерованных карточек. Вероятность комбинации без тройки.

i. $P = \frac{A_4^3}{A_5^3} = \frac{2}{5}$

(h) 5 пронумерованных карточек. Вероятность получить четное число.

i. $P = \frac{2 \cdot A_4^2}{A_5^3} = \frac{2}{5}$

7. Задача о выборке $P = \frac{C_m^k \cdot C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}$

(a) 10 элементов, среди которых 7 стандартных. Выбирается 6. Вероятность того, что среди них 4 стандартных.

i. $P = \frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{7!3!6!4!}{4!3!2!1!10!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{2}$

(b) 25 человек, среди них 10 девушек. Разыгрывается 5 билетов на концерт. Вероятность того, что среди победителей 2 девушки.

i. $P = \frac{C_{10}^2 C_{15}^3}{C_{25}^5} = \frac{10!15!5!20!}{2!8!3!12!25!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 5}{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 2} \approx 0,39$

(c) 15 красных, 9 голубых, 6 зеленых шаров. Вынимают 6. Вероятность комбинации 1 зеленый, 2 голубых, 3 красных.

i. $P = \frac{C_6^1 C_9^2 C_{15}^3}{C_{30}^6} = \frac{6!9!15!6!24!}{5!2!7!3!12!30!} = \frac{6 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{7 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30} = \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 29 \cdot 3} \approx 0,17$

(d) 3 студента первого курса, 5 второго курса, 7 третьего курса. 5 мест.

i. Вероятность выбора только студентов 3 курса.

A. $P = \frac{C_7^5}{C_{15}^5} = \frac{\frac{7!}{5!2!}}{\frac{15!}{5!10!}} = \frac{7!5!10!}{5!2!15!} = \frac{3*4*5*6*7}{11*12*13*14*15}$

ii. Вероятность того, что не выбрано ни одного второкурсника

A. $P = \frac{C_{10}^5}{C_{15}^5} = \frac{10!5!10!}{15!5!5!} = \frac{10*9*8*7*6}{15*14*13*12*11} \approx 0,08$

iii. Хотя-бы один второкурсник

A. $P = 1 - 0,08 = 0,92$

8. Геометрическая вероятность

(a) Отрезок длины 5. Ставится точка. Какова вероятность, что точка попадет в последнюю треть отрезка?

i. $P = \frac{\frac{5}{3}}{5} = \frac{1}{3}$

(b) Квадрат, вписанный в круг. Ставится точка в круг. Вероятность попадания в квадрат.

i. $P = \frac{S_\square}{S_\bigcirc} = \frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi}$

(c) На отрезок длины L брошены две точки C и B. Вероятность того, что длина $CB < \frac{L}{2}$.

i. $C(x)$, $B(y)$

A. $x < y$

B. $y - x < \frac{L}{2}$

ii. $x < y < x + \frac{L}{2}$

iii. $P(CB < \frac{L}{2}) = \frac{S_1}{S} = \frac{\frac{3}{8}L^2}{\frac{L^2}{2}} = \frac{3}{4}$

Часть III

Лекция 2 (15.02.16)

1.3 Геометрические вероятности

1. Определение

(a) Пусть:

i. Имеется отрезок AB длиной **L** и внутри него отрезок $A'B'$ длиной l

ii. Выполняются аксиомы:

A. Точка обязательно попадет на $[AB]$

B. Вероятность попадания точки на $[A'B']$ не зависит от расположения $[A'B']$, а только от его длины

C. Точка не может попасть одновременно на два непересекающихся отрезка

(b) Тогда:

i. $P(\text{т} \in [A'B']) = \frac{l}{L} = \frac{|A'B'|}{|AB|}$ — вероятность попадания точки на отрезок $[A'B']$

ii. $P(\text{т} \in d) = \frac{S_d}{S_D}$ — вероятность попадания точки в область d, принадлежащуюю области D

iii. $P(\text{т} \in d) = \frac{V_d}{V_D}$ — вероятность попадания точки в объем d, принадлежащий объему D

(c) При этом:

i. $P(A) \geq 0$

ii. $P(\Omega) = 1$

iii. $P[(\text{т} \in [A'B']) + (\text{т} \in [A''B''])] = P(\text{т} \in [A'B']) + P(\text{т} \in [A''B'']);$ $[A'B'] \cap [A''B''] = \varnothing$

2. Примеры:

(a) В куб брошена точка. Найти вероятность того, что она попадет во вписанный в куб шар.

i. $P(A) = \frac{V_\text{ш}}{V_\text{к}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{9r^3} = \frac{\pi}{6}$

(b) **Задача о встрече**: Два студента ходят обедать в X и время прихода их в X равновозможно с 12 до 13 часов. Каждый из них обедает 15 минут. Найти вероятность того, что они встретятся.

i. Построим систему координат:

A. x — время прихода первого студента

B. y — время прихода второго студента

C. Пределы от 0 до 60 ($0 \leq x \leq 60$; $0 \leq y \leq 60$)

ii. Варианты благоприятных исходов:

A. Первый студент приходит первым $\begin{cases} x < y \\ y - x < 15 \end{cases}$ $\begin{cases} y > x \\ y < x + 15 \end{cases}$

B. Второй студент приходит вервым $\begin{cases} y < x \\ x - y < 15 \end{cases}$ $\begin{cases} y < x \\ y > x - 15 \end{cases}$

C. Оба пришли одновременно $x = y$

iii. $P(A) = \frac{S_т}{S_к} = \frac{60^2 - 45^2}{60^2} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

(c) **Задача Бюффона**: Плоскость расчерчена параллельными линиями на расстоянии a друг от друга и на эту плоскость бросается иголка длиной $l < a$. Найти вероятность того, что иголка пересечет какую-либо линию.

i. Введем систему координат:

A. x — расстояние от центра иголки до ближайшей прямой $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$

B. φ — острый угол с прямой $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

C. $x < \frac{l}{2} \sin\varphi$ — условие пересечения иголки и прямой

ii. $P(A) = \frac{S_т}{S_п} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \sin\varphi d\varphi}{\frac{a}{2} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{-\frac{l}{2} \cos\varphi|_0^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{a\pi}{4}} = \frac{2l}{\pi a}$

1.4 Теоремы сложения и умножения

1. **Теорема сложения**

(a) $P(A + B) = P(A) + P(B)$, если A и B несовместны ($AB = \varnothing$)

(b) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, если A и B совместны

(c) Если $A_1, A_2, ..., A_n$ несовместны, то $P(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

(d) Если $A_1, A_2, ..., A_n$ совместны, то

i. $P(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) +$
$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - ... + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 ... A_n)$

ii. $n = 3$: $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) -$
$-P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

2. **Условной вероятностью** $P(A/B)$ назовем вероятность A, вычисленную при условии, что событие B уже произошло

(a) Пример: В аудитории n студентов, n_B — юноши, n_A — курящие, n_{AB} — курящие юноши. Случайно вызванный студент оказался юношей. Найти вероятность того, что он курит.

i. $P(A/B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{n_{AB}}{n} \cdot \frac{n}{n_B} = P(AB) \cdot \frac{1}{P(B)}$

(b) $P(A/B) = \begin{cases} 0, & \textbf{если AB=}\varnothing \\ 1, & \textbf{если } B \subset A \\ \frac{P(AB)}{P(B)}, & \textbf{в остаточных случаях} \end{cases}$

3. **Теорема умножения**: $P(AB) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$ (из определения условной вероятности)

4. A **не зависит от** B, если появление B не изменяет вероятность появления события A.

   (a) Если A не зависит от B, то $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

   (b) Следствие: Если A не зависит от B, то B не зависит от $A \Longrightarrow A$ и B **независимы** $\Longrightarrow A$ и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ тоже независимы.

5. Примеры:

   (a) Из 10 шаров 3 белых. A и B берут по одному шару. Найти вероятность $P(A)$, $P(B)$, $P(A/B)$

      i. $P(A) = \frac{3}{10}$
      ii. $P(B) = \frac{3}{10}$
      iii. $P(A/B) = \frac{2}{9}$
      iv. $P(A) \neq P(A/B) \Longrightarrow A$ и B — зависимые события

6. События $A_1, A_2, ..., A_n$ **независимы в совокупности**, если $\forall i_1, i_2, ..., i_k$ $P(A_{i_1}, A_i$ $\prod_{i=1}^{l} P(A_{ij})$

   (a) Из попарной независимости <u>не следует</u> независимость в совокупности

   (b) $P(\prod_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$

7. Примеры:

   (a) Бросаются две монеты. События: A — герб на первой монете, B — герб на второй монете, C — герб на одной монете. Расчитать вероятность этих событий.

      i. $P(A) = \frac{1}{2}$
      ii. $P(B) = \frac{1}{2}$
      iii. $P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
      iv. $P(AB) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$ — независимы
      v. $P(AC) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C)$ — независимы
      vi. $P(BC) = \frac{1}{4} = P(B) \cdot P(C)$ — независимы
      vii. $P(ABC) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ — независимости в совокупности нет

(b) Три урны, в каждой из который 4 белых и 6 черных шаров. Из первой урны во вторую перебрасывается 1 шар. Из второй ураны в третью перекладывается 1 шар. Из третьей урны извлекается 1 шар. Найти вероятность того, что все три шара будут белыми.

i. Вспомогательные события:

A. A_1 — из первой урны извлечен белый шар

B. A_2 — из второй урны извлечен белый шар

C. A_3 — из третьей урны извлечен белый шар

ii. $A = A_1 A_2 A_3$

iii. $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{11} = \frac{10}{121}$

(c) Два стрелка стрелляют по мишеням. Первый стрелок выстрелил 2 раза, второй — 1 раз. Вероятность попадания первого стрелка $= 0,7$, второго $= 0,8$. Найти вероятности событий: A — одно попадание, B — хотя-бы одно попадание.

i.

I	I	II	попадания
+	+	+	
+	+	-	
+	-	+	
+	-	-	одно
-	+	+	
-	+	-	одно
-	-	+	одно
-	-	-	ни одного

ii. Событие A:

A. $A = A_1 \overline{A_1 A_3} + \overline{A_1} A_1 \overline{A_2} + \overline{A_1 A_1} A_2$

B. $P(A) = P(A_1)(1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) +$
$+ (1 - P(A_1))P(A_1)(1 - P(A_2) +$
$+ (1 - P(A_1))^2 P(A_2) =$
$= 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + (0,3)^2 \cdot 0,2$

iii. Событие B: рассмотрим событие $\overline{B}$ — никто не попал

A. $P(B) = (1 - P(\overline{B})) =$
$= 1 - (1 - P(A_1))^2 (1 - P(A_2)) = 1 - 0,3^2 \cdot 0,2$

(d) Вероятность пооявления хотя-бы одного из n независимых событий

i. $P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\overline{A_1 A_2 ... A_n}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i})$

Часть IV

Семинар 2 (26.02.16)

1. Задача о встрече (3.2.(b))

2. Сложение и умножение вероятностей

   (a) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ — «ИЛИ»

   (b) $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$ — «И»

      i. $P(B/A)$ — вероятность события B при условии, что событие A уже наступило

3. Примеры:

   (a) В урне 40 шариков: 15 голубых, 5 зеленых, 20 белых.

      i. $P(1б) = \frac{20}{40}$

      ii. $P(1г + 1з) = P(1г) + P(1з) = \frac{15}{40} + \frac{5}{40} = \frac{20}{40}$

      iii. $P = \frac{C'_{20} C^0_{20}}{C'_{40}}$

      iv. $P(2з) = \frac{5}{40} \cdot \frac{4}{39}$

   (b) Два стрелка делают выстрел.$P_1 = 0,85$, $P_2 = 0,8$ — вероятности попадания. Найти вероятность поражения мишени.

      i. $P = P_1 + P_2 - P_1 \cdot P_2 = 0,85 + 0,8 - 0,85 \cdot 0,8 = 0,97$

      ii. $P = P_1 \cdot \overline{P_2} + \overline{P_1} \cdot P_2 + P_1 P_2$

      iii. $P = 1 - \overline{P_1 P_2}$

   (c) 8 красных шаров, 6 голубых. Последовательно без возвращения извлекают 3 шара.

      i. $P(3г) = \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12}$

      ii. $P(3г) = \frac{C^3_6 \cdot C^0_8}{C^3_{14}}$

   (d) 3 стрелка. $P_1 = 0,6$, $P_2 = 0,7$, $P_3 = 0,8$.

      i. $P(1п) = P_1 \overline{P_2 P_3} + \overline{P_1} P_2 \overline{P_3} + \overline{P_1 P_2} P_3 \approx 0,2$

      ii. $P(2п) = P_1 P_2 \overline{P_3} + P_1 \overline{P_2} P_3 + \overline{P_1} P_2 P_3 \approx 0,45$

      iii. $P(2п + 3п) = P(2п) + P_1 P_2 P_3 \approx 0.8$

   (e) 3 ящика, в каждом 30 деталей. В первом 27 стандартных, во втором — 28, в третьем — 25. Из каждого вынимают по 1 детали.

i. Вероятность того, что все три — стандартные $P = \frac{27}{30} \cdot \frac{28}{30} \cdot \frac{29}{30}$

(f) Две коробки: 2г, 3к, 5з и 4г, 2к, 4з. Из каждой вытаскивают по одному

i. $P(1\text{цвет}) = \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{17}{50} = 0,34$

(g) Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность отказа в течение часа $P = 0,6$

i. Вероятность того, что выйдут из строя все станки: $P_1 = P^4 = 0,6^4$

ii. Хотя-бы один станок выйдет из строя: $P_2 = 1 - (0.4)^4$

iii. Сломаются ровно два станка: $P_3 = 0,6^2 \cdot 0,4^2 \cdot C_4^2 = 6 \cdot 0,36 \cdot 0,16 \approx 0.35$

(h) 3 независимых испытания. Вероятность возникновения события A хотя-бы 1 раз $P_1 = 0,973$. Найти вероятность P появления события A только в одном испытании.

i. $P_1 = 1 - \overline{P^3} = 1 - 0,027 \approx 0,7$

4. Вероятность работы или отказа схем

(a) Последовательное соединение:

i. $P = p_1 p_2$

ii. $Q = 1 - p_1 p_2$

(b) Параллельное соединение:

i. $P = 1 - q_1 q_2$

ii. $Q = q_1 q_2$

5. Примеры:

(a) $p_1 - \begin{cases} p_2 \\ p_1 \end{cases} - p_2$

i. $P = p_1 \cdot p_2 \cdot (1 - q_1 q_2)$

(b) $\begin{cases} p_1 \\ p_2 \end{cases} - \begin{cases} p_3 \\ p_4 \end{cases}$

i. $P = (1 - q_1 q_2)(1 - q_3 q_4)$

(c) $\begin{cases} p_1 \\ p_2 \\ p_3 - p_4 \end{cases}$

i. $P = 1 - q_1 q_2 (1 - p_3 p_4)$

(d) $\begin{cases} p_1 \\ p_2 - p_2 \end{cases} - \begin{cases} p_2 - p_1 \\ p_2 - p_1 \end{cases}$

i. $P = (1 - q_1(1 - p_2^2))(1 - (1 - p_1 p_2)^2)$

(e) $\begin{cases} p_1 - \begin{cases} p_2 \\ p_3 \end{cases} - \quad |- \\ p_4 - - - - - - \end{cases}$

i. $P = 1 - (1 - p_1(1 - q_2 q_3))q_4$

6. Формула полной вероятности:

(a) $P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + ... + P(H_n) \cdot P(A/H_n)$

(b) $\sum P(H_i) = 1$

i. H_i — гипотеза

7. Примеры:

(a) В цехе станки 3 типов. Первый тип производит 30% продукции, второго — 25%, третьего — 45%. Процент брака первого типа 2%, второго — 1%, третьего — 3%. Найти вероятность брака случайно выбранной детали.

i. H_1 — деталь первого типа
H_2 — второго типа
H_3 — третьего типа

ii. $P(H_1) = 0,3$
$P(H_2) = 0,25$
$P(H_3) = 0,45$

iii. A — выбранна бракованная деталь

iv. $P(A/H_1) = 0,02$
$P(A/H_2) = 0,01$
$P(A/H_3) = 0,03$

v. $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) \approx 0,02$

Часть V

Лекция 3 (29.02.16)

1.5 Вычисление надежности схемы

1. **Надежность схемы** — вероятность ее работы за время t.
   (a) p_i — надежность i-го элемента
   (b) Событие A — схема работает
   (c) Элементы отказывают независимо друг от друга
2. Последовательное соединение: $p(A) = p_1 p_2 ... p_n$
3. Параллельное соединение: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (1-p_1)(1-p_2)...(1-p_n) = 1 - q_1 q_2 ... q_n$
   (a) q_i — отказ i-го элемента
4. Примеры
   (a) $\begin{cases} p_1 \quad p_2 \\ p_2 \\ p_1 \quad p_1 \end{cases} - \begin{cases} p_2 p_2 p_1 \\ p_1 \end{cases} -$
      i. $P(A) = P(1-(1-p_1p_2)(1-p_2)(1-p_1^2))P(1-(1-p_2^2p_1)(1-p_1))$

1.6 Схема гипотез. Формула полной вероятности

1. Пусть:
   (a) Событие A зависит от некоторых начальных условий, которые задаются событиями $H_1, H_2, ..., H_n$, которые называются **гипотезами**.
   (b) Гипотезы — несовместные события ($H_i H_J = \varnothing \, \forall i \neq j \ \sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$)
   (c) Вероятность всех гипотез известна
2. Тогда:
   (a) $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)P(H_i)$ — **формула полной вероятности**
3. Доказательство:

(a) $A = A\Omega = A\sum H_i = \sum_{i=1}^{n} AH_i$

(b) Так как $H_iH_j = \varnothing \forall i \neq j$, $AH_iAH_j = \varnothing$

(c) $P(A) = P(\sum_{i=1}^{n} AH_i) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)P(H_i)$

4. Пусть событие A произошло. Тогда $P(H_k/A) = \frac{P(A/H_k)P(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)P(H_i)}$ — формула Байеса

   (a) $P(AH_k) = P(A)P(H_k/A) \Longrightarrow P(H_k/A) = \frac{P(AH_k)}{P(A)} = \frac{P(A/H_k)P(H_k)}{P(A)}$

5. Пример:

   (a) На потоке 3 группы студентов. Во 2-й группе студентов в 2 раза больше, чем в 1-й, а в 3-й в 1.5 раза больше, чем в 1-й. В 1-й группе 10% двоечников, во 2-й — 30% и в 3-й — 25%. Случайным образом вызывается 1 студент. 1) Найти вероятность того, что он — двоечник. 2) Вызванный студент оказался двоечником. Какова вероятность того, что он из второй группы?

      i. Гипотезы:
         A. H_1 — вызван студент из 1-й группы
         B. H_2 — из 2-й
         C. H_3 — из 3-й

      ii. Вероятности гипотез: $\sum P(H_i) = 1$
         A. $P(H_1) = \frac{x}{4.5x} = \frac{2}{9}$
         B. $P(H_2) = \frac{4}{9}$
         C. $P(H_3) = \frac{1}{3}$

      iii. События:
         A. A — вызван двоечник
         B. $P(A/H_1) = 0.1$
         C. $P(A/H_2) = 0.3$
         D. $P(A/H_3) = 0.25$

      iv. Решение:
         A. $P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) + P(A/H_3)P(H_3) = = \frac{2}{9} \cdot 0.1 + \frac{4}{9} \cdot 0.3 + \frac{1}{3} \cdot 0.25 \approx 0.24$
         B. $P(H_2/A) = \frac{P(A/H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{9} \cdot 0.3}{0.24} = 0.55$

   (b) Студент знает 5 билетов из 25. Какая вероятноть взять нужный билет выше: если он берет билет первым или вторым?

i. События:

A. A — студент взял нужный билет первым

B. B — студент взял нужный билет вторым

ii. Решение:

A. $P(A) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

B. H_1 — первый студент взял нужный билет
H_2 — первый студент не взял нужный билет

C. $P(H_1) = \frac{1}{5}$
$P(H_2) = \frac{4}{5}$

D. $P(B/H_1) = \frac{4}{24}$
$P(B/H_2) = \frac{5}{24}$

E. $P(B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{24} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{24} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$

(c) В комнате 4 аквариума. В 1-м аквариуме 2 из 10 рыбок — золотые, в 2-м — 3 из 12, в 3-м — 0 золотых, в 4-м — 5 из 15. Случайным образом из одного из аквариумов вылавливается рыбка. Найти вероятность того, что она золотая.

i. События:

A. A — выловлена золотая рыбка

ii. Гипотезы:

A. H_1 — рыбку выловили из 1-го аквариума

B. H_2 — из 2-го

C. H_3 — из 3-го

D. H_4 — из 4-го

iii. Вероятности гипотез:

A. $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = \frac{1}{4}$

iv. Вероятности:

A. $P(A/H_1) = \frac{2}{10}$

B. $P(A/H_2) = \frac{3}{12}$

C. $P(A/H_3) = 0$

D. $P(A/H_4) = \frac{5}{15}$

v. Решение:

A. $P(A) = \frac{1}{4} \cdot 0.2 + \frac{1}{4} \cdot 0.25 + \frac{1}{4} \cdot 0.33 =$
$= \frac{1}{4}(0.2 + 0.25 + 0.33) = \frac{0.78}{4} \approx 0.2$

1.7 Повторные независимые испытания. Схема Бернулли

1. Пусть:

   (a) Эксперимент повторяется n раз.

   (b) $P_1, ..., P_n$ — результаты опытов (независимые)

   (c) В каждом опыте может появиться событие A с вероятностью p и может не появиться с вероятностью $q = 1 - p$.

2. Тогда:

   (a) $P_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k}$ — формула Бернулли — вероятность того, что событие A появится k раз из n.

3. Примеры

   (a) По каналу связи передаается 5 сообщений, каждое из которых искажается с вероятностью 0.3. Найти вероятность следующих событий: B — искажено 3 сообщения; C — искажено хотя-бы одно сообщение; D — не менее 4 сообщений не искажено.

      i. $n = 5$; A — искажение сигнала; $P(A) = p = 0.3$

      ii. $P(B) = P_{5,3} = C_5^3(0.3)^3(0.7)^2 \approx 0.13$

      iii. $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P_{5,0} = 1 - C_5^0(0.3)^0(0.7)^5 = 1 - 0.7^5 \approx 0.83$

      iv. $P(D) = P_{5,0} + P_{5,1} = C_5^0(0.3)^0(0.7)^5 + C_5^1(0.3)^1(0.7)^4$

4. Приближенная формула: $P_{n,k} \approx \frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}$, $\alpha = np \leq 10$ — формула Пуассона

5. Примеры

   (a) Телефонная станция обслуживает 1000 абонентов. Вероятность вызова любого из абонентов за время t — 0.002. Найти вероятность, что за время t: B — будет три вызова; C — не менее трех вызовов; D — от 2 до 4 вызовов.

      i. $n = 1000$; A — вызов абонента; $P(A) = p = 0.002$; $\alpha = np = 2$

      ii. $P(B) = P_{1000,3} = \frac{2^3}{3!}e^{-2} = \frac{4}{3}e^{-2}$

      iii. $P(C) = 1 - P(k < 3) = 1 - (P(k = 0) + P(k = 1) + P(k = 2)) =$
      $= 1 - \frac{2^0}{0!}e^{-2} - \frac{2!}{1!}e^{-2} - \frac{2^2}{2!}e^{-2} = 1 - 5e^{-2}$

      iv. $P(D) = P(k = 2) + P(k = 3) + p(k = 4) =$
      $= \frac{2^2}{2!}e^{-2} + \frac{2^3}{3!}e^{-2} + \frac{2^4}{4!}e^{-2} = e^{-2}(2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}) = 4e^{-2}$

6. Локальная теорема Муавра-Лапласа: $P_{n,k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_0)$; $x_0 = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$; $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ — функция Гаусса; $npq > 10$
7. Примеры
   (a) Монету бросают 100 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет 45 раз.
      i. $n = 100$; A — выпадает герб; $P(A) = p = 0.5$; $q = 0.5$
      ii. $npq = 100 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 25$
      iii. $P_{100,45} = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0.5 \cdot 0.5}}\varphi(-1) = \frac{1}{5}\varphi(-1) = \frac{\varphi(1)}{5} \approx \frac{0.242}{5} \approx 0.05$
         A. $x_0 = \frac{45-100 \cdot 0.5}{\sqrt{100 \cdot 0.5 \cdot 0.5}} = -1$

Часть VI

Семинар 3 (11.03.16)

1. В урне было 2 шара. Туда опустили белый шар, потом вытащили один. Вероятность того, что он оказался белым.
   (a) A — вытащили белый шар
   (b) Гипотезы:
      i. H_1 — в урне не было белых шаров
      ii. H_2 — в урне был один белый шар
      iii. H_3 — в урне было два белых шара
   (c) Вероятности гипотез:
      i. $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$
   (d) Вероятности:
      i. $P(A/H_1) = \frac{1}{3}$
      ii. $P(A/H_2) = \frac{2}{3}$
      iii. $P(A/H_3) = \frac{3}{3}$
   (e) $P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3} = \frac{2}{3}$
2. Три станка. Вероятности брака $P_1 = 0.02$, $P_2 = 0.03$, $P_3 = 0.04$. Производительность первого станка в три раза больше второго, производительность третьего в 2 раза меньше второго. Событие A — взятая деталь оказалась бракованной. Найти вероятность $P(H_1/A)$ того, что она выпущена первым станком.

(a) Гипотезы:

i. $P(A/H_1) = 0.02$
ii. $P(A/H_2) = 0.03$
iii. $P(A/H_3) = 0.04$

(b) Доли продукции:

i. Первый: $6x$; $P(H_1) = \frac{6}{9}$
ii. Второй: $2x$; $P(H_2) = \frac{2}{9}$
iii. Третий: x; $P(H_3) = \frac{1}{9}$

(c) $P(H_1/A) = \frac{\frac{6}{9}\cdot 0.02}{\frac{6}{9}\cdot 0.02+\frac{2}{9}\cdot 0.03+\frac{1}{9}\cdot 0.04} = \frac{6}{11}$

3. Две урны с шарами. В первой: 2 голубых, 6 красных; во второй: 4 голубых, 2 красных. Из первой урны во вторую перекладываются два шара, затем из второй достается один шар. Найти вероятность $P(A)$ того, что он голубой.

(a) Гипотезы:

i. H_1 — переложили 1 красный и 1 голубой
ii. H_2 — переложили 2 красных
iii. H_3 — переложили 2 голубых

(b) Вероятности гипотез:

i. $P(H_1) = 2 \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{24}{56}$
ii. $P(H_2) = \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{30}{56}$
iii. $P(H_3) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{56}$

(c) Вероятности:

i. $P(A/H_1) = \frac{5}{8}$
ii. $P(A/H_2) = \frac{4}{8}$
iii. $P(A/H_3) = \frac{6}{8}$

(d) $P(A) = \frac{24}{56} \cdot \frac{5}{8} + \frac{30}{56} \cdot \frac{4}{8} + \frac{2}{56} \cdot \frac{6}{8} = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} + \frac{3}{56} = \frac{33}{56}$

(e) $P(H_3/A) = \frac{\frac{2}{56}\cdot\frac{6}{8}}{\frac{33}{56}} = 0.048$

4. По шоссе едут машины. Соотношение грузовых к легковым $= \frac{3}{2}$. Вероятность того, что заправки потребует грузовая машина: 0.1; легковая: 0.2. К заправке подъезжает машина. Вероятность $P(A)$ того, что она грузовая.

(a) Гипотезы:

i. H_1 — грузовая

ii. H_2 — легковая

(b) Вероятности гипотез:

i. $P(H_1) = \frac{3}{5}$

ii. $P(H_2) = \frac{2}{5}$

(c) Вероятности:

i. $P(A/H_1) = 0.1$

ii. $P(A/H_2) = 0.2$

(d) $P(H_1/A) = \frac{\frac{3}{5}\cdot 0.1}{\frac{3}{5}\cdot 0.1+\frac{2}{5}\cdot 0.2} = \frac{0.06}{0.14} = \frac{3}{7}$

5. Схема независимых испытаний

(a) Найти вероятность того, что из 100 выстрелов стрелок попадает 80 раз.

i. $k = 80$; $n = 100$; $p = 0.75$

ii. $P_{100}^{80}(A) \approx \frac{1}{\sqrt{100\cdot 0.75\cdot 0.25}}\varphi(\frac{80-100\cdot 0.75}{\sqrt{100\cdot 0.75\cdot 0.25}}) = \frac{1}{4.3}\cdot\varphi(1.15) = \frac{1}{4.3}\cdot 0.21 \approx 0.05$

iii. $P_{100}(k \geq 80) = P_{100}(80 \leq k \leq 100) = \Phi(\frac{100-100\cdot 0.75}{\sqrt{100\cdot 0.75\cdot 0.25}}) - \Phi(\frac{80-100\cdot 0.75}{\sqrt{100\cdot 0.75\cdot 0.25}}) =$
$= \Phi(\frac{2.5}{4.3}) - \Phi(\frac{5}{4.3}) = \Phi(5.8) - \Phi(1.2) \approx 0.5 - 0.385 = 0.115$

(b) Вероятность опечатки в книге: 0.01. Количество символов: 1000. Найти вероятность 3-х опечаток.

i. $P_{1000}^{3} = \frac{10^3}{3!}e^{-10} = 0.008$

ii. $P_{1000}(k < 3) = P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2) = e^{-10} + 10\cdot e^{-10} + \frac{10^2 e^{-10}}{2} = 0.003$

Часть VII

Лекция 4 (14.03.16)

2 Случайные величины

1. Определение: **Случайная величина** — величина, которая в результате случайного опыта принимает числовые значения.

2. Определение: **Случайной величиной** ξ назовем функцию, переводящую пространство случайных исходов на числовую прямую $\xi : \Omega \to R$ так, что $\forall \omega \in \Omega\ \xi(\omega) \in R$; $\forall x \in R$ определена вероятность $P(\xi < x)$.

3. Определение: **Функция распределения** случайной величины ξ: $F_\xi(x) = P(\xi < x)\ \forall x \in R$ равна вероятности того, что ξ принимает значения меньше любого наперед заданного числа x.

4. Свойства функции распределения:

   (a) $F_\xi(x)$ не убывает

      i. $x_1 < x_2$

      ii. $F_\xi(x_2) = P(\xi < x_2) = P\{(\xi < x_1) \cup (\xi \in [x_1, x_2])\} =$
      $= P(\xi < x_1) + P(\xi \in [x_1, x_2]) \Longrightarrow F_\xi(x_2) \geq F_\xi(x_1)$

   (b) $F_\xi(x) \to 0$ при $x \to -\infty$; $F_\xi(x) \to 1$ при $x \to \infty$

      i. $0 \leq F_\xi(x) \leq 1$

   (c) $P(a \leq \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$

      i. Из свойства 1: $P(\xi \in [x_1, x_2]) = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)$

   (d) $F_\xi(x)$ непрерывна слева

5. Следствие: $P(\xi = a) = \begin{cases} 0 & \text{если } F \text{ в точке } a \text{ непрерывна} \\ \text{величина скачка} & \text{если } F \text{ в точке } a \text{ имеет разрыв} \end{cases}$

2.1 Дискретные случайные величины

1. Определение: ξ называется **дискретной случайной величиной** (ДСВ), если она принимает конечное (счетное) множество значений.

   (a) Значения $\xi_1, ..., \xi_n$ случайной величины ξ несовместны и составляют полную группу.

   (b) $P(\xi = \xi_k) = P(\omega : \xi(\omega) = \xi_k$

2. Определение: **Рядом распределения** ДСВ ξ назовем таблицу, в верхней строке которой будут все значения ξ, а в нижней — соответствующие им вероятности.

   (a)

ξ_1	...	ξ_n
p_1	...	p_k

3. Пример: Имеются три пронумерованных шара. Извлекаются два шара. Построить ряд распределения ДСВ ξ суммы очков на извлеченных шарах. Построить график функции распределения $F_\xi(x)$ и найти вероятность, что сумма очков будет не более 4.

   (a)

ξ	3	4	5
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

   (b) $F_\xi(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0 & x \leq 3 \\ \frac{1}{3} & 3 < x \leq 4 \\ \frac{2}{3} & 4 < x \leq 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$

   (c) $P(\xi \leq 4) = P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = \frac{2}{3}$

4. Определение: $\eta = \varphi(\xi)$ — **функция случайной величины** ξ, если она сама является случайной величиной и вероятности сохраняются.

   (a)

$\varphi(\xi_1)$	...	$\varphi(\xi_n)$
p_1	...	p_n

2.1.1 Числовые характеристики дискретных случайных величин

1. **Математическое ожидание** $M_\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i p_i$ — среднее значение случайной величины

   (a) В случае бесконечного ряда требуется абсолютная сходимость.

   (b) Пример:

ξ	2	2^2	...	2^n
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{1}{2^n}$

      i. $\sum p_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

      ii. $M_\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum 1$ — расходится

   (c) Свойства математического ожидания:

      i. $M_C = C$ $(C = const)$

      ii. $M(C\xi) = CM_\xi$

      iii. $M(\xi \pm \eta) = M_\xi \pm M_\eta$

      iv. $M(\xi n) = M_\xi M_\eta$, если ξ и η независимы

2. **Дисперсия** $D_\xi = M[(\xi - M_\xi)^2] \geq 0$ — разброс

(a) Теорема: $D_\xi = M(\xi^2) - (M_\xi)^2$

i. $D_\xi = M[(\xi - M_\xi)^2] = M(\xi^2 - 2\xi M_\xi + (M_\xi)^2) =$
$= M(\xi^2) - 2M_\xi^2 + M_\xi^2 = M(\xi^2) - M_\xi^2$

(b) $D_\xi = M(\xi^2) - M_\xi^2 = \sum_i \xi_i^2 p_i - (\sum_i \xi_i p_i)^2$

(c) Свойства дисперсии:

i. $D_C = 0$

ii. $D(C\xi) = C^2 D_\xi$

iii. $D(\xi \pm \eta) = D_\xi + D_\eta$ (если ξ и η независимы)

3. **Среднеквадратическое отклонение** $\sigma_\xi = \sqrt{D} \geq 0$ — разброс

(a) Свойства:

i. $\sigma_C = 0$

ii. $\sigma(C\xi) = |c|\sigma_\xi$

iii. $\sigma(\xi \pm \eta) = \sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2}$ (если ξ и η независимы)

4. **Мода** m_0 — наиболее вероятное значение случайной величины ξ

(a)

ξ	0	1	2
p	0.3	0.3	0.5

; $m_0 = 2$

5. **Медиана** m_e — $P(\xi < m_e) = P(\xi > m_e)$ или $F_\xi(m_e) = \frac{1}{2}$

6. **Производящая функция** $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$; $0 < z \leq 1$

(a) $\varphi'(z) = \sum k p_k z^{k-1}$; $\varphi'(1) = \sum k p_k = M_\xi$

(b) $\varphi''(z) = \sum k(k-1) p_k z^{k-2} 1$ $\varphi''(1) = \sum k^2 p_k - \sum k p_k =$
$= M(\xi^2) - (M_\xi)^2 = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2 = D_\xi$

2.1.2 Основные дискретные распределения

1. **Биномиальное распределение**: $\xi = \{0, 1, ..., n\}$, $p_k = p(\xi = k) = c_n^k p^k q^{n-1}$ — схема повторных независимых испытаний

(a)

ξ	k
p	$C_n^k p^k q^{n-k}$

(b) $\varphi(z) = \sum C_n^k p^k q^{n-k} z^k = (pz + q)^n$

i. $M_\xi = \varphi'(1) = n(pz+q)^{n-1}|_{z=1} = np$

ii. $D_\xi = npq$

(c) Пример: Стрелок производит 8 выстрелов с вероятностью попадания 0.3 при каждом выстреле. Построить ряд распредения ДСВ ξ числа попаданий (в общем виде). Найти $M_\xi, D_\xi, \sigma_\xi, P(3\,\text{попадания})$

i. $n = 8$; A — попадание; $p = P(A) = 0.3$; $q = 1 - p = 0.7$

ii.

ξ	k
p	$C_8^k(0.3)^k(0.7)^{8-k}$

iii. $M_\xi = np = 8 \cdot 0.3 = 2.4$

iv. $D_\xi = npq = 8 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 1.68$

v. $\sigma_\xi = \sqrt{1.68} \approx 1.3$

vi. $P(k=3) = C_8^3 0.3^3 0.7^5$

2. **Распределение Пуассона** $\xi = \{0, 1, ..., n\}$; $P_k = \frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}$; $(n \to \infty;\ P(A) \to 0;\ \alpha = np)$

(a)

ξ	k
p	$\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}$

(b) $M_\xi = np = \alpha$

(c) $D_\xi = npq \approx \alpha$

(d) $P(z) = e^{-\alpha(1-z)}$

(e) Пример: Страховая компания имеет 1000 клиентов. Вероятность наступления страхового случая 0.003. Построить ряд распределения ξ числа страховых случаев в общем виде. Найти $M_\xi, D_\xi, \sigma_\xi, P(\text{менее 2 случаев})$

i. $n = 1000$; A — натупление страхового случая; $P(A) = p = 0.003$; $\alpha = np = 3$

ii.

ξ	k
p	$\frac{3^k}{k!}e^{-3}$

iii. $M_\xi = 3$

iv. $D_\xi = 1000 \cdot 0.003 \cdot 0.997 \approx 3$

v. $P(k < 2) = P(k=0) + P(k=1) = \frac{3^0}{0!}e^{-3} + \frac{3}{1!}e^{-3} = 4e^{-3}$

Часть VIII

Семинар 4 (25.03.16)

Случайные величины

Дискретные случайные величины

1.

x	x_1	x_2	...	x_i
p	p_1	p_2	...	p_i

2. $p_1 = P(x = x_1)$

3. $\sum p_i = 1$

4. Примеры:

   (a) Разыгрывается 100 билетов: 1 по 50 рублей, 10 по 1 рублю.

      i. x — сумма выигрыша 1 билета

      ii.

x	0	1	50
p	$\frac{89}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{1}{100}$

   (b) Подбрасывается 2 кубика, x — сумма очков.

      i.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

   (c) 7 карандашей, 4 из которых — красные. Вытаскиваются 3. x — количество красных в выборке.

      i.

x	0	1	2	3
p	$\frac{1}{35}$	$\frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35}$	$\frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}$	$\frac{C_4^3 C_3^0}{C_7^3} = \frac{4}{35}$

5. Функция распределения: $F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i$

6. Математическое ожидание: $M_x = \sum_i x_i \cdot p_i$

7. Дисперсия: $D_x = M(X - M_x)^2 = M_{x^2} - (M_x)^2$

   (a) $M_{x^2} = \sum_i x_i^2 \cdot p_i$

8. Среднеквадратичное отклонение: $\sigma_x = \sqrt{D_x}$

9. Примеры:

(a)

x	0	1	2
p	0.3	0.5	0.2

i. $F(x) =?$

A. $F(x \leq 0) = 0$

B. $F(0 < x \leq 1) = 0.3$

C. $F(1 < x \leq 2) = 0.8$

D. $F(x > 2) = 1$

ii. $M_x = 0.5 + 0.2 \cdot 2 = 0.9$

iii. $D_x = M_{x^2} - M_x^2 = 0.5 + 4 \cdot 0.2 - 0.81 = 0.49$

iv. $\sigma_x = \sqrt{0.49} = \pm 0.7$

(b) Три стрелка. $p_1 = 0.6$; $p_2 = 0.7$; $p_3 = 0.8$; Три выстрела; x — количество попаданий

i.

x	0	1	2	3
p	0.024	0.188	0.452	0.336

A. $p(x = 0) = 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.2 = 0.024$

B. $p(x = 1) = 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.8 =$
$= 0.036 + 0.056 + 0.096 = 0.188$

C. ...

ii. $M_x = 0.188 + 2 \cdot 0.452 + 3 \cdot 0.336 = 2.1$

iii. $D_x = M_{x^2} - M_x^2 = 0.188 + 4 \cdot 0.452 + 9 \cdot 0.336 - 2.1^2 = 0.61$

iv. $\sigma_x = \sqrt{0.61} \approx \pm 0.78$

10. Биномиальное распределение

(a)

x	0	1	...	k	...	n
p	q^n			$p_n(k)$		p^n

i. $M_x = np$

ii. $D_x = npq$

11. Распределение Пуассона

(a)

x	0	1	...	k	...
p	$e^{-\lambda}$			$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	

i. $M_x = D_x = np = \lambda$

12. Геометрическое распределение

(a) x — количество испытаний до первого наступления события A

(b)

x	1	2	3	...	k	...
p	p	qp	q^2p		$q^{k-1}p$	

i. $M_x = \frac{1}{p}$

ii. $D_x = \frac{q}{p^2}$

13. Урезанное геометрическое распределение

(a)

x	1	...	$n-1$	n
p	p		$q^{n-2}p$	q^{n-1}

14. Типовой расчет: 2.1, 2.2, 2.3

Часть IX

Лекция 5 (28.03.16)

1. **Геометрическое** распределение: ξ — число испытаний схемы Бернулли до первого наступления события A.

(a)

ξ	1	2	...	k	...
p	p	qp		$q^{k-1}p$	

(b) $M_\xi = \frac{1}{p}$

(c) $D_\xi = \frac{q}{p^2}$

(d) $\varphi(z) = \frac{pz}{1-qz}$

(e) Примеры:

i. Стрелок стреляет **до первого** попадания, имея неограниченное число патронов. Вероятность промаха 0.1. ξ — число произведенных выстрелов. Найти M_ξ, D_ξ. Найти вероятность, что будет не менее 4-х выстрелов.

A. A — попадание

B. $M_\xi = \frac{1}{1-0.1} = \frac{1}{0.9}$

C. $D_\xi = \frac{0.1}{(0.9)^2} \approx 0.12$

D.

ξ	1	2	3	...	k
p	0.9	$0.1 \cdot 0.9 = 0.09$	$0.1^2 \cdot 0.9$		$(0.1)^{k-1} \cdot 0.9$

E. $P(k \geq 4) = 1 - P(k \leq 3) = 1 - 0.9 - 0.09 - 0.009 = 0.001$

ii. Та же задача, но у стрелка только 3 патрона.

A.

ξ	1	2	3
p	0.9	$0.1 \cdot 0.9$	$0.1^2 \cdot 0.9 + 0.1^2 \cdot 0.1 = 0.1^2$

B. Распределение не геометрическое. Характеристики считаем по общим формулам.

C. $M_\xi = 0.9 + 2 \cdot 0.09 + 3 \cdot 0.01$

2.2 Непрерывные случайные величины

1. Определение: ξ — **непрерывная случайная величина**, если её функцию распределения можно представить в виде интеграла некоторой функции $f(t)$ $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, где $f(t)$ — абсолютно интегрируемая, непрерывная везде кроме конечного числа точек.

   (a) $F(x)$ непрерывна везде

   (b) $f(x) = F'(x)$ во всех точках непрерывности

   (c) $f(x)$ — плотность распределения непрерывной случайной величины ξ

2. Свойства $f(x)$:

   (a) $f(x) \geq 0$

   (b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

   (c) $P(a \leq \xi \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

2.2.1 Числовые характеристики

1. **Математическое ожидание** $M_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_\xi(x)dx$ (требуется абсолютная сходимость)

2. **Дисперсия** $D_\xi = M[(\xi - M_\xi)^2] = M(\xi^2) - (M_\xi)^2$

   (a) $D_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f_\xi(x)dx - (M_\xi)^2$

3. **Среднеквадратическое отклонение** $\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}$

4. **Мода** m_0 — точка, где плотность распределения имеет локальный максимум

2.2.2 Примеры

1. Непрерывная случайная величина ξ задана плотностью $f_\xi(x) = \begin{cases} A\sin x, & x \in [0; \\ 0, & x \notin [0, \end{cases}$

   Найти A, M_ξ, D_ξ, $P(\xi \in [-3; \frac{\pi}{2}])$

   (a) $A\int_0^\pi \sin x\,dx = -A\cos x|_0^\pi = -A(-1-1) = 2A = 1 \Longrightarrow A = \frac{1}{2}$

   (b) $M_\xi = \frac{1}{2}\int_0^\pi x\sin x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi xd(\cos x) =$
   $= -\frac{1}{2}(x\cos x|_0^\pi - \int_0^\pi \cos x) =$
   $= -\frac{1}{2}(-\pi - \sin x|_0^\pi) = \frac{\pi}{2}$

   (c) $D_\xi = \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\sin x\,dx - (\frac{\pi}{2})^2 = \frac{\pi^2}{4} - 2 > 0$

   (d) $\sigma_\xi = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}$

   (e) $P(\xi \in [-3; \frac{\pi}{2}]) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$

2. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$. Найти: $P(\xi \in [\frac{1}{2}, 10])$, M_ξ.

   (a) $P(\xi \in [\frac{1}{2}, 10]) = F(10) - F(\frac{1}{2}) = 1 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$

3. $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x \in (0, 1] \end{cases}$

   (a) $M_\xi = \int_0^1 x \cdot 2x\,dx = 2\frac{x^3}{3}|_0^1 = \frac{2}{3}$

2.2.3 Распределения

1. **Равномерное** распределение на отрезке $[a, b]$

   (a) $f(x) = \begin{cases} const, & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$

   (b) $1 = \int_a^b c\,dx = cx|_a^b = c(b-a)$; $c = \frac{1}{b-a}$

   (c) $M_\xi = \int \frac{1}{b-a}x\,dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$

   (d) $D_\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$

(e) $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}dt = \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \end{cases}$

(f) Пример: ξ равномерно распределена на $[-15, -5]$. Найти $f(x)$, M_ξ, D_ξ, $P(\xi \in [-8, 12])$

i. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & x \in [-15, -5] \\ 0, & x \notin [-15, -5] \end{cases}$

ii. $M_\xi = \frac{-15-5}{2} = 10$

iii. $D_\xi = \frac{(-5+15)^2}{12} = \frac{100}{12}$

iv. $P(\xi \in [-8, 12]) = \int_{-8}^{-5} \frac{1}{10}dx = \frac{x}{10}|_{-8}^{-5} = 0.3$

2. **Показательное** распределение с параметром λ

(a) $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}; \lambda > 0$

(b) $M_\xi = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} x\,dx = \frac{1}{\lambda}$

(c) $D_\xi = \frac{1}{\lambda^2}$

(d) $\sigma_\xi = \frac{1}{\lambda}$

(e) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = \lambda(-\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda t}|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$

(f) $e^{-\lambda t}$ — функция надежности — вероятность работы устройства за время t

(g) Пример: Среднее время работы прибора — 500 часов. Найти вероятность того, что прибор проработает более 1000 часов, если время работы распределено по показательному закону.

i. $M_\xi = 500 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{500}$

ii. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{500}e^{-\frac{1}{500}x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

iii. $P(\xi > 1000) = 1 - P(\xi \le 1000) = 1 - \int_0^{1000} \frac{1}{500}e^{-\frac{1}{500}x}dx =$
$= 1 - \frac{1}{500} \cdot (-500)e^{-\frac{1}{500}x}|_0^{1000} = 1 + e^{-2} - 1 = e^{-2}$

3. **Нормальное** распределение $N(m, \sigma)$

(a) $f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

(b) $M_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)}{2\sigma^2}}dx = \begin{vmatrix} \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t \\ x = m+\sigma\sqrt{2}t \\ dx = \sigma\sqrt{2}dt \end{vmatrix} =$
$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(m+\sigma\sqrt{2}t)e^{-t^2}\cdot\sigma\sqrt{2}dt =$
$= \frac{m}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt + \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-t^2}dt =$
$= \frac{m}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = m$

(c) $D_\xi = \sigma^2$

(d) $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}}du = \begin{vmatrix} \frac{u-m}{\sigma} = t \\ du = \sigma dt \end{vmatrix} =$
$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = F_{m,\sigma}(x)$

(e) Определение: ξ_0 — стандартная нормально распределенная случайная величина, если её распределение $N(0,1)$, $f_{\xi_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

i. $F_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \Phi^*(x)$ — **функция Лапласа**

ii. $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — **нормированная функция Лапласа**

(f) Свойства функции Лапласа:

i. $\Phi(0) = 0$

ii. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$

iii. $\Phi^*(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x)$

iv. $F_{m,\sigma}(x) = \Phi^*(\frac{x-m}{\sigma}) = \frac{1}{2} + \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$

v. $P(a \le \xi \le b) = \Phi(\frac{b-m}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-m}{\sigma})$

A. $P(a \le \xi_0 \le b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

vi. $P(|\xi - m| < \varepsilon) \approx 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})$ — вероятность отклонения случайной величины от мат. ожидания на величину, меньшую ε.

A. $P(|\xi - m| < \varepsilon) = P(m-\varepsilon < \xi < m+\varepsilon) =$
$= \Phi(\frac{m+\varepsilon-m}{\sigma}) - \Phi(\frac{m-\varepsilon-m}{\sigma}) = \Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) - \Phi(-\frac{\varepsilon}{m}) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})$

(g) Пример: правило 3-х сигм

i. $P(|\xi - m| < 3\sigma) = 2\Phi(\frac{3\sigma}{\sigma}) = 2\Phi(3) \approx 0.997$

(h) Пример: Случайная величина ξ распределена по закону $N(3,2)$. Найти M_ξ, D_ξ, σ_ξ, $P(\xi \in [1,3])$; $f_\eta(y)$, если $\eta = 2\xi - 7$

i. $M_\xi = 3$

ii. $D_\xi = 4$

iii. $\sigma_\xi = 2$

iv. $P(\xi \in [1,3]) = \Phi(\frac{3-3}{2}) - \Phi(\frac{1-3}{2}) = \Phi(0) - \Phi(-1) = \Phi(1) \approx 0.34$

v. Замечания:

A. Линейное преобразование нормальной случайной величины — нормально.

B. Сумма независимых нормальных случайных величин — нормальна.

vi. $M_\eta = M(2\xi - 7) = 2M_\xi - 7 = -1$

vii. $D_\eta = D(2\xi - 7) = 2^2 D_\xi + 0 = 16$

viii. $\sigma_\eta = 4$

ix. η: $N(-1,4)$; $f_\eta(y) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+1)^2}{2\cdot 16}}$

(i) Пример: Ошибка измерений подчиняется нормальному закону. Систематическая ошибка отсутствует. Среднеквадратическая ошибка — 5 мм. Найти вероятность того, что ошибка будет в пределах от 2 до 6 мм. Какая будет максимальная по абсолютной величине ошибка с вероятностью 0.95?

i. ξ — ошибка измерения

ii. Систематическая ошибка — мат. ожидание — $M_\xi = 0$

iii. $\sigma_\xi = 5$ мм

iv. $N(0,5)$

v. $P(2 \le \xi \le 6) = \Phi(\frac{6-0}{5}) - \Phi(\frac{2-0}{5}) = \Phi(1.2) - \Phi(0.4) = 0.23$

vi. $P(|\xi - m| < \varepsilon) = P(|\xi| < \varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{5}) = 2 \cdot 0.475$

vii. $\frac{\varepsilon}{5} = 1.96$; $\varepsilon = 9.8$ мм

(j) Повторные независимые испытания с $n \to \infty$. Вероятность того, что событие A появится от k_1 до k_2 раз из n.

i. $P(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}})$

ii. $P(|\frac{m}{n} - p(A)| < \varepsilon) \approx 2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})$ — вероятность отклонения относительной частоты появления события A от вероятности события A на величину, меньшую ε.

(k) Пример: Монету бросают 100 раз. Найти вероятность, что герб появится от 35 до 45 раз. Сколько надо провести бросков монеты, чтобы относительная частота появления герба отклонялась от его вероятности не более, чем на 0.1 с вероятностью 0.95?

i. $n = 100$; A — появление герба; $P(A) = 0.5$; $q = 1 - p = 0.5$

ii. $P(35 \le l \le 45) = \Phi(\frac{45 - 0.5\cdot 100}{\sqrt{100\cdot 0.5\cdot 0.5}}) - \Phi(\frac{35 - 0.5\cdot 100}{\sqrt{100\cdot 0.5\cdot 0.5}}) =$
$= \Phi(-1) - \Phi(-3) = \Phi(3) - \Phi(1) = 0.5 - 0.34 \approx 0.16$

iii. $0.95 = P(|\frac{m}{n} - 0.5| < 0.1) = 2\Phi(0.1\sqrt{\frac{n}{0.5 \cdot 0.5}}) = 2\Phi(0.2\sqrt{n})$

iv. $n = (\frac{1.69}{0.2})^2 \approx 90$

Часть X

Лекция 6 (4.04.16)

3 Многомерные случайные величины

3.1 Дискретные случайные векторы

1. (ξ, η) — дискретный случайный вектор, если ξ и η — дискретные случайные величины.

   (a) $\xi = \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$

   (b) $\eta = \eta_1, \eta_2, ..., \eta_m$

2.

$\xi \backslash \eta$	η_1	η_2	$\dots$	η_m
ξ_1	p_{11}	p_{12}		p_{1m}
ξ_2	p_{21}	p_{22}		p_{2m}
$\dots$				
ξ_n	p_{n1}	p_{n2}		p_{nm}

— **таблица распределения**

   (a)

ξ	ξ_1	ξ_2	$\dots$
p	$\sum_{j=1}^{m} p_{1j}$	$\sum_{i=1}^{m} p_{2j}$	

   (b)

η	η_1	η_2	$\dots$
p	$\sum_{i=1}^{n} p_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} p_{i2}$	

3. ξ и η **независимы**, если их взаимная вероятность $p_{ij} = P(\xi = \xi_i) \cdot P(\eta = \eta_i), \forall i, j$

4. По таблице распределения можно строить одномерные ряды распределения, **обратное неверно**.

5. Функция распределения дискретного случайного вектора $F_{\xi\eta}(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$

   (a) $F_{\xi\eta}$ не убывает по x и по y

   (b) $F_{\xi\eta}$ непрерывна слева по x и по y

(c) $F_{\xi\eta}(-\infty, -\infty) = F_{\xi\eta}(-\infty, y) = F_{\xi\eta}(x, -\infty) = 0$
$F_{\xi\eta}(+\infty, +\infty) = 1$

(d) $F_{\xi\eta}(x, +\infty) = F_{\xi}(x)$
$F_{\xi\eta}(+\infty, y) = F_{\eta}(y)$

6. $Z = \varphi(\xi)$ — функция ξ

(a)

ξ	ξ_1	ξ_2	...
p	p_1	p_1	

(b)

Z	$\varphi(\xi_1)$	$\varphi(\xi_2)$	...
p	p_1	p_2	

7. $\Theta = \varphi(\xi, \eta)$ — функция дискретного случайного вектора (ξ, η)

(a)

Θ	$\varphi(\xi_1, \eta_1)$	...
p	p_{11}	

8. Ковариация (корелляционный момент) $K_{\xi\eta} = M((\xi - M_\xi)(\eta - M_\eta))$ — характеристика зависимости между ξ и η

   (a) $r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta}$ — коэффициент корелляции

   (b) Свойства:

      i. $K_{\xi\eta} = K_{\eta\xi}$
      ii. $K_{\xi\xi} = D_\xi$; $K_{\eta\eta} = D_\eta$
      iii. $K_{\xi\eta} \leq \sqrt{D_\xi D_\eta}$ — неравенство Шварца
         A. $|r_{\xi\eta}| \leq 1$
      iv. $r_{\xi\eta} = \pm 1 \Longrightarrow \eta = a\xi + b$
         A. если $r = 1$, то $a > 0$
         B. если $r = -1$, то $a < 0$
         C. Положительный коэффициент корелляции означает, что случайные величины или обе возрастают, или обе убывают.
      v. Если ξ и η независимы, то корелляционный момент и коэффициент корелляции равны нулю $k_{\xi\eta} = 0$. **Обратное неверно**.
      vi. $K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M_\xi \cdot M_\eta$

9. Пример (3.1.1 ТР): Дискретный случайный вектор задан таблицей

$\xi \backslash \eta$	0	1
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{1}{4}$	0

Построить одномерные ряды распределения ξ и η. Зависимы ли ξ и η? Найти $K_{\xi\eta}$.

(a)

ξ	-1	1	
p	$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$	$\sum p_i = 1$

(b)

η	0	1	2	
p	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\sum p_i = 1$

(c) $P(\xi = -1, \eta = 0) = \frac{1}{8}$

(d) $P(\xi = -1) = \frac{1}{2}$; $P(\eta = 0) = \frac{3}{8}$

(e) $\frac{1}{8} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \Rightarrow \xi$ и η зависимы

(f) $M_\xi = 0$; $M_\eta = 0 + \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$

(g)

$\xi\eta$	0	-1	-2	0	1	2
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

(h)

$\xi\eta$	-1	0	2	
p	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\sum p_i = 1$

(i) $M(\xi\eta) = -\frac{3}{8} + 0 + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

(j) $K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M_\xi M_\eta = \frac{1}{8} - 0 \cdot \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$

Часть XI

Семинар 5 (8.04.16)

Непрерывные случайные величины

1. Функция распределения $F(x) = P(X < x)$

   (a) $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

2. Плотность распределения $f(x) = F'(x)$

   (a) $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

3. Свойство нормированности: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

4. Мат. ожидание: $MX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$

5. Дисперсия: $DX = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - (MX)^2$

6. Пример: Случайная величина задана на всей оси распределения. $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$; $x \in (-\infty, \infty)$. Найти вероятность того, что случайная величина попадет в интервал от 0 до 1.
   (a) $P(0 < X < 1) = F(1) - F(0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
   (b) $P(X < \sqrt{3}) = F(\sqrt{3}) - F(-\infty) = F(\sqrt{3}) = \frac{5}{6}$
7. Пример: Задана плотность распределения случайной величины $f(x) = \frac{4c}{e^x - e^{-x}}$; $\forall x \in (-\infty, \infty)$. Найти константу c.
   (a) $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 4c\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = 4c\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx =$
   $= 4c\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(e^x)}{e^{2x}+1} = 4c \cdot \operatorname{arctg}(e^x)|_{-\infty}^{\infty} = 2c\pi$
   (b) $2c\pi = 1$; $c = \frac{1}{2\pi}$
8. Пример: Задана плотность $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{\pi}{6} \\ 2\cos x, & \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$
   (a) $x \leq \frac{\pi}{6}$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$
   (b) $\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{2}$: $F(x) = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{x} \cos t\, dt = 2\sin t|_{\frac{\pi}{6}}^{x} = 2\sin x - 1$
   (c) $x > \frac{\pi}{2}$: $F(x) = 2\sin x - 1 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} 0dt = 2\sin x|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$
   (d) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{\pi}{6} \\ 2\sin x - 1, & \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$
9. Пример: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$. Найти мат. ожидание MX и дисперсию DX.
   (a) $f(x) = F'(x)$
   (b) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 < x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$
   (c) $MX = \int_0^4 x \cdot \frac{1}{4}dx = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{4}|_0^4 = 2$

(d) $DX = \int_0^4 x^2 \cdot \frac{1}{4}dx - (MX)^2 = \frac{x^3}{12}|_0^4 - 4 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$

10. Пример: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ A(4x - x^2), & 0 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$. Найти $F(x)$, MX, DX, $P(1 < x < 2)$

(a) $F(x) = \int_0^4 A(4x - x^2)dx = A(32 - \frac{64}{3}) = \frac{32}{3}A$; $\frac{32}{3}A = 1$; $A = \frac{3}{32}$

(b) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{3}{32}(2x^2 - \frac{x^3}{3}), & 0 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$

(c) $MX = \int_0^4 x \cdot \frac{3}{32}(2x^2 - \frac{x^3}{3})dx$

(d) $DX = \int_0^4 x^2 \cdot \frac{3}{32}(2x^2 - \frac{x^3}{3})dx - (MX)^2$

(e) $P(1 < x < 2) = F(2) - F(1) = \frac{3}{32}(8 - \frac{8}{3} - 2 + \frac{1}{3}) = \frac{11}{32}$

Стандартные распределения

1. Равномерное в $[a, b]$

   (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$

   (b) $F(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x < a \\ 1, & x > b \end{cases}$

   (c) $MX = \frac{a+b}{2}$

   (d) $DX = \frac{(b-a)^2}{12}$

2. Показательное с параметром λ

   (a) $MX = \frac{1}{\lambda}$

   (b) $DX = \frac{1}{\lambda^2}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

(d) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$

3. Нормальное распределение

   (a) $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$
   (b) $MX = a$
   (c) $DX = \sigma^2$
   (d) $P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$
   (e) $P(|x - a| < \delta) = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma})$
   (f) $P(|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}})$

Часть XII

Лекция 7 (11.04.16)

1. Пример: ξ и η — независимые дискретные случайные величины, заданные рядами распределения:

ξ	0	1	2
p	0.4	0.2	0.4

,

η	0	1
p	0.5	0.5

. Найти $\Theta = 2\xi - \eta$; M_Θ, D_Θ

   (a)

Θ	0	2	4	-1	1	3
p	$0.4 \cdot 0.5$	$0.2 \cdot 0.5$	$0.4 \cdot 0.5$	$0.4 \cdot 0.5$	$0.2 \cdot 0.5$	$0.4 \cdot 0.5$

   (b)

Θ	-1	0	1	2	3	4	
p	0.2	0.2	0.1	0.1	0.2	0.2	$\sum p_i = 1$

   (c) Способ 1: Непосредственное вычисление по ряду распределения Θ
      i. $M_\Theta = -0.2 + 0.1 + 0.2 + 0.6 + 0.8 = 1.5$
      ii. $D_\Theta = 0.2 + 0.1 + 0.4 + 1.8 + 3.2 - (1.5)^2 = 5.7 - 2.25 = 3.45$
   (d) Способ 2: С помощью свойств мат. ожидания и дисперсии
      i. $M_\xi = 0.2 + 0.8 = 1$; $M_\eta = 0.5$
      ii. $D_\xi = 0.2 + 1.6 - 1 = 0.8$; $D_\eta = 0.5 - 0.25 = 0.25$
      iii. $M_\Theta = M(2\xi - \eta) = 2M_\xi - M_\eta = 2 - 0.5 = 1.5$
      iv. $D_\Theta = D(2\xi - \eta) = 4D_\xi + D_\eta = 3.2 + 0.25 = 3.45$

3.2 Непрерывные случайные векторы

1. **Непрерывный случайный вектор** — вектор, функция распределения которого может быть задана в виде функции $F_{\xi\eta}(x,y) = P(\xi < x, \eta < y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{\xi\eta}(u,v)\,du\,dv$
   (a) $f_{\xi\eta}$ — плотность совместного распределения
   (b) $f_{\xi\eta}(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$

2. Свойства функции распределения:
   (a) $F(x,y)$ непрерывна по x и y
   (b) $F(x,y)$ не убывает по x и y
   (c) $F(-\infty,-\infty) = F(x,-\infty) = F(-\infty,y)\begin{cases} = 0 \\ \to 0 \end{cases}$
   $F(+\infty,+\infty)\begin{cases} = 1 \\ \to 1 \end{cases}$
   (d) $F_{\xi\eta}(x,+\infty) = F_{\xi}(x)$
   $F_{\xi\eta}(+\infty,y) = F_{\eta}(y)$

3. Свойства плотности распределения $f_{\xi\eta}(x,y)$
   (a) $f(x,y) \geq 0$
   (b) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x,y)\,dx\,dy = 1$ — условие нормировки
   (c) $P((\xi,\eta) \in D) = \iint_D f_{\xi\eta}(x,y)\,dx\,dy$
   (d) $f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x,y)\,dy$
   $f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x,y)\,dx$

4. ξ и η — **независимы**, если совместная плотность равна произведению плотностей компонент по всем точкам $f_{\xi\eta}(x,y) = f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y)$, $\forall x, y$.

5. Основные характеристики:
   (a) $M_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{\xi}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{\xi\eta}(x,y)\,dx\,dy$
   $M_{\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{\eta}(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{\xi\eta}(x,y)\,dx\,dy$
   (b) $D_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{\xi\eta}(x,y)\,dx\,dy - (M_{\xi})^2$
   $D_{\eta} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot f_{\xi\eta}(x,y)\,dx\,dy - (M_{\eta})^2$

(c) $k_{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f_{\xi\eta}(x,y)\,dx\,dy - M_\xi \cdot M_\eta$ — корелляционный момент

6. Пример: Непрерывный случайный вектор задан плотностью $f_{\xi\eta}(x,y) = \frac{c}{(1+x^2)(1+y^2)}$. Выяснить, зависимы ли ξ и η. Найти функцию распределения. Найти вероятность попадания $P((\xi,\eta) \in D)$ в область $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$.

   (a) Найдем c из условия нормировки

      i. $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)} = c\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{1+y^2} =$
      $= c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\cdot arctg(y)|_{-\infty}^{\infty} =$
      $= c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})) = c\pi\,\mathrm{arctg}(x)|_{-\infty}^{\infty} = c\pi^2$

      ii. $c = \frac{1}{\pi^2}$

   (b) Проверим зависимость ξ и η

      i. $f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(1+x^2)(1+y^2)} =$
      $= \frac{1}{\pi^2(1+x^2)}\,\mathrm{arctg}(y)|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

      ii. $f_\eta(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$

      iii. $f_{\xi\eta} = f_\xi \cdot f_\eta \Longrightarrow \xi$ и η **независимы**

   (c) $P((\xi,\eta)\in D) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{dy}{(1+x^2)(1+y^2)} =$
   $= \frac{1}{\pi^2}\,\mathrm{arctg}(x)|_0^1 \cdot \mathrm{arctg}(y)|_0^1 = \frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{4}-0)(\frac{\pi}{4}-0) = \frac{1}{16}$

   (d) $F_{\xi\eta}(x,y)\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x} du\int_{-\infty}^{y}\frac{dv}{(1+u^2)(1+v^2)} =$
   $= \frac{1}{\pi^2}(\mathrm{arctg}(x)+\frac{\pi}{2})(\mathrm{arctg}(y)+\frac{\pi}{2})$

7. Распределения:

   (a) **Равномерное** распределение в области D

      i. $f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} const, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases}$

      ii. Пример: (ξ,η) равномерно распределен в области D. Зависит ли ξ от η? Найти $M_\xi, M_\eta, D_\xi, D_\eta,\ k_{\xi\eta},\ P((\xi,\eta)\in D)$. $D' : \{x^2+y^2 \le 1\}$

         A. $f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases}$

         B. $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \int_0^{x+1} dy = y|_0^{x+1} = x+1, & -1 < x \le 0 \\ \int_0^{-x+1} dy = 1-x, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$

C. $f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \int_{y-1}^{1-y} dx = x|_{y-1}^{1-y} = 2-2y, & 0 < y \le 1 \\ 0, & y > 1 \end{cases}$

D. $M_\xi = \int_{-1}^{0} x\,dx \int_0^{x+1} dy + \int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} dy =$
$= \int_{-1}^{0} x(x+1)dx + \int_0^1 x(1-x)dx =$
$= (\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2})|_{-1}^{0} + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})|_0^1 = 0$

E. $M_\eta = \int_0^1 y\,d \int_{y-1}^{1-y} dx = \int_0^1 y(2-2y)dy =$
$= (y^2 - \frac{2y^3}{3})_0^1 = \frac{1}{3}$

F. $D_\eta = \int_0^1 y^2\,dy \int_{y-1}^{1-y} dx - (\frac{1}{3})^2 = \int_0^1 y^2(2-2y)dy - \frac{1}{9} =$
$= (2\frac{y^3}{3} - 2\frac{y^4}{4})|_0^1 - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$

G. $k_{\xi\eta} = \int_0^1 y\,dy \int_{y-1}^{1-y} x\,dx - 0 \cdot \frac{1}{3} = \int_0^1 y \cdot \frac{x^2}{2}|_{y-1}^{1-y} dy = 0$

H. $P((\xi,\eta) \in D') = \frac{1}{S_D} S_{D''} = 1$

(b) **Нормальное** двумерное распределение

i. $f_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-r_{\xi\eta}^2}} exp\{-\frac{1}{2(1-r_{\xi\eta}^2)}(\frac{(x-m_\xi)^2}{\sigma_\xi^2} - 2r_{\xi\eta}\frac{(x-m_\xi)(y-m_\xi)}{\sigma_\xi\sigma_\eta} + \frac{(y-m_\eta)^2}{\sigma_\eta^2})\}$

A. $r_{\xi\eta}$ — коэффициент кореляции

ii. Свойства:

A. Линейное преобразование нормального распределения **нормально**

B. Компоненты нормального случайного вектора распределены **нормально**

C. Сумма независимых номальных величин **нормальна**

D. Из некореллированности компонент нормального вектора следует их **независимость**

Часть XIII

Лекция 8 (18.04.16)

3.3 Функция непрерывной случайной величины

1. ξ — непрерывная случайная величина; $f_\xi(x)$ — плотность распределения

2. $\eta = \varphi(\xi)$ — тоже непрерывная случайная величина
3. $F_\eta(y) = P(\eta < y)$
   (a) $\varphi(x)$ возрастает
      i. $F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(\xi < \varphi^{-1}(y)) = \int_{-\infty}^{\varphi^{-1}(y)} f_\xi(x)dx$
      ii. $f_\eta(y) = F'_\eta = f_\xi(\varphi^{-1}(y)) \cdot (\varphi_\eta^{-1}(y))' > 0$
   (b) $\varphi(x)$ убывает
      i. $F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(\xi > \varphi^{-1}(y)) = \int_{\varphi^{-1}(y)}^{+\infty} f_\xi(x)dx$
      ii. $f_\eta(y) = -f_\xi(\varphi^{-1}(y)) \cdot (\varphi^{-1}(y))' > 0$
   (c) $f_\eta(y) = f_\xi(\varphi^{-1}(y)) \cdot |(\varphi^{-1}(y))'|$
   (d) Если функция $\varphi(\xi)$ не монотонна, то она разбивается на монотонные куски и соответствующие плотности складываются.
4. $M_\eta = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_\eta(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_\xi(\varphi^{-1}(y)) \cdot (\varphi^{-1}(y))'\,dy =$
   $= \begin{vmatrix} x = \varphi^{-1}(y) \\ y = \varphi(x) \\ dx = \varphi^{-1}(y)dy \end{vmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot f_\xi(x)\,dx$
5. Пример:
   (a) Непрерывная случайная величина ξ распределена по показательному закону с $\lambda = 3$; $\eta = 2 - 3\xi$. Найти $f_\eta(y)$.
      i. $f_\xi(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
      ii. $y = 2 - 3x$
      iii. $\varphi^{-1}(y) = \frac{2-y}{3}$
      iv. 1 способ
         A. $F_\eta(y) = \int_{\frac{2-y}{3}}^{+\infty} 3e^{-3x}dx = -e^{-3x}|_{\frac{2-y}{3}}^{+\infty} =$
         $= e^{-3\frac{2-y}{3}} = e^{y-2} = \begin{cases} e^{y-2}, & y \leq 2 \\ 1, & y > 2 \end{cases}$
         B. $f_\eta(y) = F'_\eta(y) = \begin{cases} e^{y-2}, & y \leq 2 \\ 0, & y > 2 \end{cases}$
      v. 2 способ

A. $f_\eta(y) = 3e^{-3\frac{2-y}{3}} \cdot |-\frac{1}{3}| = e^{y-2} = \begin{cases} e^{y-2}, & y \le 2 \\ 0, & y > 2 \end{cases}$

vi. $M_\eta = \int_0^{+\infty}(2-3x)\cdot 3e^{-3x}dx = \begin{vmatrix} 2-3x=4 & -3dx=du \\ e^{-3x}dx=dv & -\frac{1}{3}e^{-3x}=v \end{vmatrix} =$
$= 3(-\frac{2-3x}{3}e^{-3x}|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-3x}dx) = 3(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-3x}|_0^\infty) =$
$= 3(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) = 1$

(b) ξ нормально распределена с параметрами $N(0,1)$; $\eta = \xi^2$. Найти $f_\eta(y)$.

i. $F_\eta(y) = P(\eta < y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

ii. $f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}} \cdot |-\frac{1}{2\sqrt{y}}| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} =$
$= \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} = \begin{cases} \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$

3.4 Функция непрерывного случайного вектора

1. (ξ, η) — непрерывный случайный вектор; $f_{\xi\eta}(x,y)$ — плотность распределения.

2. $\Theta = \varphi(\xi, \eta)$

   (a) $F_\Theta(z) = P(\Theta < z) = \iint_D f_{\xi\eta}(x,y)dxdy$

   (b) $f_\Theta = F'_\Theta$

3. $\Theta = \xi + \eta$

   (a) $F_\Theta(z) = P(\Theta < z) = P(x + y < z) = P(y < z - x) =$
   $= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f_{\xi\eta}(x,y)dy$

   (b) $f_\Theta(z) = F'_\Theta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x, z-x)dx$

   (c) Если ξ и η независимы:

   i. $f_\Theta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta(z-x)dx =$
   $= \int_{-\infty}^{\infty} f_\eta(y) f_\xi(z-y)dy = f_\xi * f_\eta$ (свертка)

4. Примеры:

   (a) ξ и η распределены по показательному закону с показателем λ. $\Theta = \xi + \eta$. Найти $f_\Theta(x)$.

i. $f_\xi = f_\eta = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

ii. $f_\Theta(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} dx = \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_0^z dx =$
$= \lambda^2 e^{-\lambda z} x|_0^z = \begin{cases} \lambda^2 z e^{-\lambda z}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$

4 Предельные теоремы. Закон больших чисел

1. **Неравенство Чебышева**: $P(|\xi - M_\xi| > \varepsilon) \leq \frac{D_\xi}{\varepsilon^2}$
2. Определение: Система случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ **сходится по вероятности** к случайной величине ξ ($\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} \xi$), если $P(|\xi_n - \xi) < \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
3. **Теорема Чебышева**:
   (a) Пусть:
      i. $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — независимые случайные величины
      ii. $M_1, M_2, ..., M_n$ — их мат. ожидание
      iii. $D_1, D_2, ..., D_n$ — их дисперсия
      iv. $D_i \leq C \, \forall i$
   (b) Тогда:
      i. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - M_k) \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0$
      ii. $P(\frac{1}{n} | \sum_{k=1}^n (\xi_k - M_k)| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
   (c) Доказательство:
      i. $\eta = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k$ — среднее арифметическое
      ii. $M_\eta = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_k$
      iii. $D_\eta = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D_k$
      iv. $P(|\eta - M_\eta| > \varepsilon) \leq \frac{\frac{1}{n^2} \sum D_k}{\varepsilon^2} \leq \frac{\frac{1}{n^2} cn}{\varepsilon^2} = \frac{c}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
   (d) Следствие:
      i. $\xi_1, ..., \xi_n$ одинаково распределены $\Longrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{p} M$
4. **Теорема Бернулли**: $P(|\frac{k}{n} - P_A| < \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
   (a) ξ_i — число появления события A в i-м опыте

(b)

ξ_i	0	1
p	$1-p$	p

i. $M_{\xi_i} = p$
ii. $D_{\xi_i} = p - p^2 = pq$
iii. $\sum_{i=1}^{n} \xi_i = \frac{k}{n}$

(c) $P(|\eta - M_\eta| > \varepsilon) = P(|\frac{k}{n} - p| > \varepsilon) \to 0$

5. **Центральная предельная теорема**

(a) Пусть:

i. $\xi_1, ..., \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины
ii. $M_{\xi_i} = M$
iii. $D_{\xi_i} = D$
iv. $f_{\xi_i} = f$

(b) Тогда:

i. Функция распределения центрированной и нормированной суммы случайных величин стремится к стандартному нормальному распределению при $S \to \infty$.
ii. $P(\frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k - nM}{\sigma\sqrt{n}} < x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$
iii. $\sum_{k=1}^{n} \xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{} N(nM, \sigma\sqrt{n})$

6. **Интегральная теорема Муавра-Лапласа**

(a) $P(k_1 \le k \le k_2) = P(\frac{k_1 - nM}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{k - nM}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{k_2 - nM}{\sigma\sqrt{n}}) =$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{k_1 - nM}{\sigma\sqrt{n}}}^{\frac{k_2 - nM}{\sigma\sqrt{n}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}})$

7. Пример: Стрелок стреляет в мишень. Вероятности попадания:

7	8	9	10
0.1	0.1	0.3	0.5

. Найти вероятность набора более 940 очков за 100 выстрелов.

(a) ξ_k — число очков при k-м выстреле

(b)

ξ_k	7	8	9	10
p	0.1	0.1	0.3	0.5

i. $M_{\xi_k} = 9.2$

ii. $D_{\xi_k} \approx 1$

iii. $\sigma \approx 1$

(c) $\eta = \sum_{k=1}^{1000} \xi_k$

(d) $\eta = N(nM, \sigma\sqrt{n}) = N(920, 10)$

(e) $P(\eta > 940) = \Phi(\frac{1000-920}{10}) - \Phi(\frac{940-920}{10}) = \Phi(8) - \Phi(2) \approx 0.023$

Контрольная работа №2

1. Две задачи на дискретные случайные величины (общего вида и на одно из распределений (Бернулли, Пуассона, ...))
2. Две задачи на непрерывные случайные величины (общего вида и на одно из распределений (равномерное, показательное, нормальное))
3. Вектор
4. Функция

Часть XIV

Семинар 6 (22.04.16)

Случайные векторы

1. x и y назависимы $\Rightarrow P(x = x_i, y = y_i) = P(x = x_i) \cdot P(y = y_i)$
2. $k_{xy} = M(xy) - Mx \cdot My$ — корелляционный момент
   (a) $k_{xy} \neq 0 \Rightarrow x$ и y коррелированы $\Rightarrow$ зависимы
   (b) $k_{xy} = 0 \Rightarrow x$ и y некоррелированы
      i. x и y независимы $\Rightarrow k_{xy} = 0$ (обратное не всегда верно)
3. $M(\alpha X + \beta Y) = \alpha MX + \beta MY$ — мат. ожидание
4. $D(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 DX + \beta^2 DY + 2k_{xy}\alpha\beta$ — дисперсия
5. Пример:

$y \backslash x$	26	30	41	50
2.3	0.05	0.12	0.08	0.04
2.7	0.09	0.3	0.11	0.21

; $\sum P(x_i, y_j) = 1$

(a)

x	26	30	41	50	
P	$0.05 + 0.09 = 0.14$	0.42	0.19	0.25	$\sum p_i = 1$

(b)

y	2.3	2.7	
P	$0.05 + 0.12 + 0.08 + 0.04 = 0.29$	0.71	$\sum p_i = 1$

(c) $P(x = 26, y = 2.3) = 0.05$; $P(x = 26) \cdot P(y = 2.3) = 0.14 \cdot 0.29 = 0.041$ $\Rightarrow$ зависимы

(d) $MX = 0.14 \cdot 26 + 0.42 \cdot 30 + 41 \cdot 0.19 + 50 \cdot 0.25 = 36.53$
$MY = 2.3 \cdot 0.29 + 2.7 \cdot 0.71 = 2.584$

(e)

x	y	P	$X \cdot Y$
26	2.3	0.05	59.8
26	2.7	0.09	70.2
30	2.3	0.12	69
30	2.7	0.3	81
41	2.3	0.08	94.3
41	2.7	0.11	110.7
50	2.3	0.04	115
50	2.7	0.21	135

(f)

XY	59.8	70.2	69	81	94.3	110.7	115	135
P	0.05	0.09	0.12	0.3	0.08	0.11	0.04	0.21

(g) $M(XY) = 59.8 * 0.05 + 70.2 * 0.09 + 69 * 0.12 + 81 * 0.3+$
$+94.3 * 0.08 + 110.7 * 0.11 + 115 * 0.04 + 135 * 0.21 = 94.56$

(h) $k_{xy} = 94.56 - 36.53 * 2.58 = 0.3126$

6. Пример:

$y \backslash x$	-1	0	2
-1	1/4	1/8	1/8
0	0	1/4	0
1	1/8	0	1/8

(a)

x	y	P	xy
-1	-1	1/4	1
-1	0	0	0
-1	1	1/8	-1
0	-1	1/8	0
0	0	1/4	0
0	1	0	0
2	-1	1/8	-2
2	0	0	0
2	1	1/8	2

(b)

x	-1	0	2	
P	3/8	3/8	2/8	$\sum p_i = 1$

(c)

y	-1	0	1	
P	4/8	2/8	2/8	$\sum p_1 = 1$

(d) $MX = -3/8 + 4/8 = 1/8$
$MY = -4/8 + 2/8 = -2/8$

(e)

XY	1	0	-1	-2	2
P	1/4	3/8	1/8	1/8	1/8

(f) $M(XY) = 1/4 - 1/8 = 1/8$

(g) $k_{xy} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{5}{32} \neq 0 \Rightarrow$ зависимы

(h) Для $z = 2y - x$:

i.

x	y	P	$2y - x$
-1	-1	1/4	-1
-1	0	0	1
-1	1	1/8	3
0	-1	1/8	-2
0	0	1/4	0
0	1	0	2
2	-1	1/8	-4
2	0	0	-2
2	1	1/8	0

ii.

z	-1	1	3	-2	0	2	-4	
P	1/4	0	1/8	1/8	3/8	0	1/8	$\sum p_i = 1$

iii. 1 способ: по ряду распределения

A. $MZ = -\frac{5}{8}$

iv. 2 способ: по свойству линейной комбинации

A. $MZ = -\frac{1}{8} + 2(-\frac{2}{8}) = -\frac{5}{8}$

Непрерывные случайные векторы

1. x и y непрерывны $\Rightarrow F(x, y)$; $f(x, y)$
2. x и y независимы $\Leftrightarrow F(x, y) = F_x(x) \cdot F_y(y)$; $f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$
3. $P((x, y) \in G) = \iint_G f(x, y)dxdy$
4. $f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$; $f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$

5. $MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x)dx$; $MY = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_y(y)dy$

6. $M(XY) = \iint_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f(x,y)dxdy$

7. Пример: (x, y) распределены равномерно внутри треугольника с вершинами $A(0,4), B(4,0), C(0,0)$. Найти $f(x,y), f_x(x), f_y(y)$, зависимость x и y, k_{xy}, $P(0 < x < 1, 1 < y < 3)$.

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & (x,y) \in \triangle \\ 0, & (x,y) \notin \triangle \end{cases}$

   (b) $\iint_\triangle c\,dxdy = c \cdot S_\triangle = 8c$; $8c = 1$; $c = \frac{1}{8}$

   (c) $f_x(x) = \int_0^{4-x} \frac{1}{8}dy = \begin{cases} \frac{4-x}{8}, & x \in [0,4] \\ 0, & x \notin [0,4] \end{cases}$
   $f_y(y) = \int_0^{4-y} \frac{1}{8}dx = \begin{cases} \frac{4-y}{8}, & x \in [0,4] \\ 0, & x \notin [0,4] \end{cases}$

   (d) $f_x(x) \cdot f_y(y) = \begin{cases} 0, & x, y \notin \triangle \\ \frac{1}{64}(4-x)(4-y), & x, y \in \triangle \end{cases} \neq f(x,y) \Rightarrow x$ и y зависимы

   (e) $MX = \int_0^4 x \cdot \frac{4-x}{8}\,dx = \frac{1}{8}(4\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})|_0^4 = \frac{4}{3}$
   $MY = \int_0^4 y \cdot \frac{4-y}{8}\,dy = \frac{4}{3}$

   (f) $M(XY) = \iint_\triangle xy\frac{1}{8}dxdy = \frac{1}{8}\int_0^4 x\,dx \int_0^{4-x} y\,dy =$
   $= \frac{1}{8}\int_0^4 \frac{x(4-x)^2}{2}dx = \frac{4}{3}$

   (g) $k_{xy} = \frac{4}{3} - (\frac{4}{3})^2 \neq 0 \Rightarrow x$ и y зависимы

   (h) $P(0 < x < 1, 1 < y < 3) = \iint_\square \frac{1}{8}dxdy = \frac{1}{8}\int_0^1 dx \int_1^3 dy = \frac{1}{4}$

8. Пример: $f(x,y) = \frac{A}{(1+x^2)(1+y^2)}$

   (a) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{(1+x^2)(1+y^2)} =$
   $= A\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx(\mathrm{arctg}(\infty) - \mathrm{arctg}(-\infty)) = A \cdot \pi^2 = 1$

   (b) $A = \frac{1}{\pi^2}$

   (c) $f_x(x) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dy = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$
   $f_y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$

   (d) $f(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y) \Rightarrow x$ и y независимы

   (e) $P(|x| < 1, |y| < 1) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} \int_{-1}^{1} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{\pi^2}\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}$

(f) $F(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{du}{(1+u^2)}\int_{-\infty}^{y}\frac{dv}{(1+v^2)} = \frac{1}{\pi^2}(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2})(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2})$

9. Пример: $f(x,y) = \begin{cases} A(x+y), & 0 \le x, y \le 1 \\ 0, & ... \end{cases}$. Найти MX, MY, DX, DY, k_{xy}

10. Пример: $f(x,y) = \begin{cases} Ae^{-x}e^{-y}, & x, y \ge 0 \\ 0, & x, y < 0 \end{cases}$

Часть XV

Лекция 9 (25.04.16)

5 Определение случайного процесса. Траектории и сечения процесса цепи Маркова. Матрица перехода вероятностей. Теорема существования предельного распределения цепи Маркова. Эргономичность цепи Марвока. Марковские процессы с непрерывным временем. Уравнения Колмборова. Эргономичность марковских процессов.

1. Ранее познакомились со случайными величинами, обозначаемыми либо ξ, η, либо X, Y и т.д. Случайная величина X была определена на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P).

2. Определение: **Случайным процессом** будем называть семейство случайных величин, определенных на вероятностном пространстве (Ω, F, P), зависящих от параметра t.

3. Траектория процесса не является случайной функцией.

4. **Сечение** процесса $X(t, \omega)$ — случайная величина $X(t_k, \omega)$. В разные моменты времени получаем разные случайные величины.

5. **Фазовое пространство** процесса $X(t, \omega)$ — множество его значений.

   (a) Фазовое состояние процесса и множество его состояний может быть как дискретным, так и непрерывным.

(b) Множество T ($t \in T$) также может быть дискретным или непрерывным.

6. Сочетая эти возможности множества T и фазового пространства процесса $X(t,n)$ получаем 4 типа случайных процессов.

5.1 Случайная последовательность

1. Процесс $X(t,\omega)$, у которого T дискретно и фазовое пространство дискретно, называется **случайной последовательностью**.

2. Цепь Маркова (или марковская цепь) с конечным числом состояний — случайная последовательность, удовлетворяющая следующим свойствам:

   (a) Марковское свойство: $P(X(t_k) = \xi_k|_{x(t_1)=\xi_1,\ldots,x(t_{k-1})=\xi_{k-1}}) = P\{x(t_k) = \xi_k/X(t_{k-1}) = \xi_{k-1}\}$

3. Матрица переходных вероятностей из состояния i в любое состояние j: $P_{(1)} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}$

   (a) p_{ij} — вероятность перехода из состояния i в состояние j.

   (b) Свойства:

      i. $p_{ij} \geq 0$

      ii. $\sum_{i=1}^{k} p_{ij} = 1$

4. Рассмотрим однородную цепь Маркова. Матрица переходных вероятностей остается постоянной при переходе от момента времени m к $(m+1)$.

   (a) $\overline{P}(1) = \overline{P}(0) \cdot P_{(1)}$

   (b) $\overline{P}(2) = \overline{P}(1)P_{(1)} = \overline{P}(0)P_{(1)}^2$

   (c) $\overline{P}(n) = \overline{P}(0)P_{(1)}^n = \overline{P}(m)P_{(1)}^{n-m}$

   (d) $P(\infty) = \lim_{n\to\infty} \overline{P}(n)$

      i. $\overline{P}(\infty)$ — предельное распределение

5. Теорема 1: Предельное распределение цепи Маркова существует тогда и только тогда, когда $|P - \lambda E| = 0$ имеет корень $\lambda = 1$ — единственный на единичной окружности.

6. Теоорема 2: Предельное распределение цепи Маркова, не зависящее от начального распределения от начального распределения $\overline{P}(0)$, существует тогда и только тогда, когда корень $\lambda = 1$ характеристического уравнения $|P - \lambda E| = 0$ будет единственным на единичной окружности, а также простым.

7. Примеры:

   (a) Пусть $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $|P - \lambda E| = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$ $(1-\lambda)^2 = 0$; $\lambda = 1$, но это двухкратный корень.

      i. $\overline{P}(1) = \overline{P}(0) \cdot P = \overline{P}(0)$
      ii. $\overline{P}(2) = \overline{P}(0) \cdot P^2 = \overline{P}(0) \cdot P$
      iii. $p(n) = \overline{P}(0)$
      iv. $\lim_{n\to\infty} p(n) = \overline{P}(0)$, т.е. существует $p(\infty) = \overline{P}(0)$, но оно зависит от начального распределения.

8. Теорема 3: Если предельное распределение существует, то оно совпадает со стационарным распределением $\overline{P}^*$.

9. Определение: **Стационарное распределение** $\overline{P}^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_k^*)$ — распределение вероятностей состояний (ξ, ξ_k), которое не меняется от шага к шагу, т.е. при применении матрицы переходных вероятностей P получаем опять то же распределение вероятностей.

   (a) Запишем в виде системы линейных уравнений:

      i. $$\begin{cases} \overline{P}^* = \overline{P}^* \cdot P \\ \overline{P}_1^* + \overline{P}_2^* + ... + \overline{P}_k^* = 1 \end{cases} = \begin{cases} \overline{P}_1^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_k^*) \\ \overline{P}_2^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_k^*) \\ ... \\ \overline{P}_k^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_k^*) \\ p_1^* + p_2^* + ... + p_k^* = 1 \end{cases}$$

10. Теорема 4: Если все компоненты предельного вектора распределения положительны, то цепь Маркова **эргономична**, т.е. для некоторого n все вероятности $p_i(\infty) > 0$ и следовательно цепь Маркова может с положительной вероятностью находиться в любом из состояний.

    (a) Если какие-то компоненты $p_i(\infty)$ равны нулю, то цепь Маркова не эргономична.

Часть XVI

Семинар 7 (06.05.16)

1. Задача **3.2** из ТР: $y = y(x)$; $f(x)$ — плотность распределения
   (a) $x = x(y)$
   (b) x'_y
   (c) $g(y) = f(x(y)) \cdot |x'(y)|$
   (d) $M_y = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot g(y) dx$
2. X — равномерно распределена на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; найти плотность распределения $g(y)$.
   (a) $y = \sin x$ — монотонна на всём интервале
      i. $f(x) = \frac{1}{\pi}$
      ii. $x = \arcsin y$
      iii. $x' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
      iv. $g(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$; $y \in (-1; 1)$
   (b) $y = \cos x$ — возрастает на $(-\frac{\pi}{2}; 0)$ и убывает на $(0; \frac{\pi}{2})$
      i. $(-\frac{\pi}{2}; 0)$
         A. $x = -\arccos y$
         B. $x' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
         C. $g(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$; $(0, 1)$
      ii. $(0; \frac{\pi}{2})$
         A. $x = \arccos y$
         B. $g(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
   (c) $y = x^2$
      i. $[-\frac{\pi}{2}; 0]$ — убывает
         A. $x = -\sqrt{y}$
         B. $x' = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$
      ii. $(0; \frac{\pi}{2}]$ — возраствет
         A. $x = \sqrt{y}$

B. $x' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

iii. $g(y) = \frac{1}{\pi}(\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}) = \frac{1}{\pi\sqrt{y}}$; $y \in (0; \frac{\pi^2}{4})$

3. Найти плостность распределения $Y(X)$ и мат. ожидание M_Y.
$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, & x \in (0,\pi) \\ 0, & x \notin (0,\pi) \end{cases}$; $y = x^2$.

(a) $x = \sqrt{y}$

(b) $x' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

(c) $g(y) = \frac{1}{2}\sin\sqrt{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$; $y \in (0, \pi^2)$

(d) $M_y = \int_0^{\pi^2} y \cdot \frac{\sin\sqrt{y}}{4\sqrt{y}} dy = \frac{1}{4}\int_0^{\pi^2} \sqrt{y}\sin\sqrt{y} dy =$

$= \begin{vmatrix} t = \sqrt{y} & dy = 2t\,dt \\ dt = \frac{dy}{2\sqrt{y}} & \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} t^2 \sin t\,dt =$

$= \begin{vmatrix} u = t^2 & dv = \sin t dt \\ du = 2dt & v = -\cos t \end{vmatrix} = -\frac{t^2}{2}\cos t|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} t\cos t\,dt =$

$= \frac{\pi^2}{2} + \int_0^{\pi} t\cos t\,dt = \begin{vmatrix} u = t & du = dt \\ dv = \cos t\,dt & v = \sin t \end{vmatrix} =$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} t^2 \sin t dt = \frac{\pi^2}{2} + \cos t|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - 2$

4. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos x, & x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ 0, & x \notin (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{cases}$; $y = 2|x| - \frac{\pi}{4}$

(a) $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$

i. $y = -2x - \frac{\pi}{4}$

ii. $-2x = y + \frac{\pi}{4}$; $x = -\frac{y}{2} - \frac{\pi}{8}$

iii. $x' = -\frac{1}{2}$

iv. $g_1(y) = \frac{1}{2}\cos(-\frac{y}{2} - \frac{\pi}{8}) - \frac{1}{2}$

(b) $x \in (0; \frac{\pi}{2})$

i. $y = 2x - \frac{\pi}{4}$

ii. $x = \frac{y}{2} + \frac{\pi}{8}$

iii. $x' = \frac{1}{2}$

iv. $g_2(y) = \frac{1}{2}\cos(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{8}) - \frac{1}{2}$

(c) $g(y) = \frac{1}{2}\cos(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{8})$; $y \in (-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$

(d) $M_y = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} y\cos(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{8})dy$

5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

   (a) $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

6. $P(1) = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$; S_1, S_2; $\overline{P}(0) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$; $\overline{P}(2)$ — ?

   (a) $\overline{P}(n) = \overline{P}(0)\cdot P^n$

   (b) $\overline{P}(2) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}^2 =$
   $= \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} =$
   $= \begin{pmatrix} 0.273 & 0.727 \end{pmatrix}$

7. $P(1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; Найти стационарное распределение $P_c =?$

   (a) $\overline{p}_c = \overline{p}_c \cdot P$

   (b) $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{cases} \frac{1}{2}p_1 = p_1 \\ \frac{1}{2}p_1 + p_2 = p_2 \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = 1 \end{cases}$

   (d) $\overline{p}_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. Задача 5.1 из ТР: $S = \{s_1, s_2, s_3\}$; $\lambda = \begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ 0 & & 3 \\ 2 & 1 & \end{pmatrix}$; Составить граф состояний системы. Составить уравнения Колмогорова.

   (a) *граф*

   (b) $\begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial t} = 2p_3 - p_1 \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} = p_1 + p_3 - 3p_2 \\ \frac{\partial p_3}{\partial t} = 3p_2 - 2p_3 - p_3 \end{cases}$

(c) $\overline{p}_c : \begin{cases} 2p_3 - p_1 = 0 \\ p_1 + p_3 - 3p_2 = 0 \\ 3p_2 - 3p_3 = 0 \end{cases}$

Часть XVII

Семинар 8 (20.05.16)

1. Корелляционная функция $K_\xi(t_1, t_2)$, M_ξ, $\eta(t) = L_t^0(\xi(t)) + \varphi(t)$, где L_0^t — линейное преобразование. Найти $K_\eta(t_1, t_2)$, M_η, D_η.

   (a) $M_\eta(t) = L_t^0[M_\xi(t)] + \varphi(t)$

   (b) $K_\eta(t_1, t_2) = L_{t_1}^0 L_{t_2}^0 [K_\xi(t_1, t_2)]$

   (c) $D_\eta(t) = K_\xi(t, t)$

2. Пример 1 **(задача 5.1 из ТР)**: $K_\xi(t_1, t_2) = t_1^3 t_2^3 + \cos 3t_1 \cos 3t_2$; $M_\xi(t) = e^{2t}$; $\eta(t) = \frac{t^2 d\xi}{dt} + \sin 5t$

   (a) $M_\eta(t) = t^2 (e^{2t})' + \sin 5t = 2t^2 e^{2t} + \sin 5t$

   (b) $K_\eta(t_1, t_2) = L_{t_1}^0 (L_{t_2}^0 [t_1^3 t_2^3 + \cos 3t_1 \cos 3t_2]) =$
   $= L_{t_1}^0 [t_2^2 (t_1^3 3t_2^2 - 3 \cos 3t_1 \sin 3t_2)] =$
   $= L_{t_1}^0 (3t_1^3 t_2^4 - 3t_2^2 \cos 3t_1 \sin 3t_2) =$
   $= t_1^2 (9t_1^2 t_2^4 + 9t_2^2 \sin 3t_1 \sin 3t_2)$

   (c) $D_\eta(t) = 9t^8 + 9t^4 \sin^2 3t$

3. Пример 2: $K_\xi(t_1, t_2) = 2e^{5t} e^{5t_2}$; $M_\xi(t) = \cos 6t$; $\eta(t) = \sqrt{t} \sin t \cdot (\xi(t) + t^2)$

   (a) $\eta(t) = \sqrt{t} \sin t \cdot \xi(t) + \sqrt{t} \sin t \cdot t^2$

      i. $L_t^0 = \sqrt{t} \sin t \cdot \xi(t)$

   (b) $M_\eta(t) = \sqrt{t} \sin t \cos 6t + \sqrt{t} \sin t \cdot t^2$

   (c) $K_\xi(t_1, t_2) = L_{t_1}^0 L_{t_2}^0 [2e^{5t_1} \cdot e^{5t_2}] =$
   $= L_{t_1}^0 [\sqrt{t_2} \sin t_2 2e^{5t_1} \cdot 5e^{5t_2}] =$
   $= \sqrt{t_1} \sin t_1 \sqrt{t_2} \sin t_2 2e^{5t_1} e^{5t_2}$

   (d) $D_\eta(t) = t \sin^2 t \cdot 2e^{10t}$

4. Пример 3: $K_\xi(t_1, t_2) = t_1^4 \cdot t_2^4$; $M_\xi(t) = \sin 3t$; $\eta(t) = t \int_0^t \xi(\tau) d\tau + e^{5t}$

(a) $L_t^0 = t\int_0^t \xi(\tau)d\tau$

(b) $M_\eta(t) = t\int_0^t \sin 3\tau d\tau + e^{5t} = -\frac{t}{3}\cos 3t + \frac{1}{3}t + e^{5t}$

(c) $K_\eta(t_1, t_2) = L_{t_1}^0 L_{t_2}^0(t_1^4 t_2^4) = L_{t_1}^0[t_2\int_0^{t_2} t_1^4\tau_2^4 d\tau_2] =$
$= L_{t_1}^0(t_2 t_1^4 \frac{t_2^5}{5}) = \frac{t_2^6}{5}\cdot t_1\int_0^{t_1}\tau_1^4 d\tau = \frac{1}{25}t_2^6 t_1^6$

(d) $D_\eta(t) = \frac{1}{25}t^{12}$

5. $\xi(t) = \xi_1\varphi_1(t) + \xi_2\varphi_2(t) + ... + \xi_n\varphi_n(t) + \varphi_0(t)$

(a) $M_\xi = \varphi_0(t)$

(b) $K_\xi(t_1, t_2) = \sum_1^n D_k\varphi_k(t_1)\cdot\overline{\varphi_k(t_2)}$

(c) $D_\xi(t) = K_\xi(t, t)$

6. Пример 4 (3.3): $\xi(t) = \xi_1 + \xi_2 te^{2t} + 3i\xi_3\sin 2t$; $D_1 = 4$; $D_2 = 2$; $D_3 = 2$

(a) $\varphi_0(t) = 0$; $\varphi_1(t) = 1$; $\varphi_2(t) = te^{2t}$; $\varphi_3(t) = 3i\sin 2t$

(b) $M_\xi = 0$

(c) $K_\xi(t_1, t_2) = 4\cdot 1\cdot\overline{1} + 2t_1e^{2t_1}\cdot\overline{t_2e^{2t_2}} + 2\cdot 3i\sin 2t_1\cdot\overline{3i\sin 2t_2} =$
$= 4 + 2t_1t_2e^{2t_1}e^{2t_2} + 18\sin 2t_1\sin 2t_2$

(d) $D_\xi(t) = 4 + 2t^2e^{4t_1} + 18\sin^2 2t$

7. Пример 5: $\xi(t) = \xi_1e^{5it} + i\xi_2t^3 + \xi_3\cos 2t$

(a) $M_\xi = 0$

(b) $K_\xi(t_1, t_2) = 2e^{5it}\overline{e^{5it_2}} + 3it_1^3\overline{it_2^3} + 4\cos 2t_1\overline{\cos 2t_2} =$
$= 2e^{5it_1}e^{-5it_2} + 3t_1^3t_2^3 + 4\cos 2t_1\cos 2t_2$

(c) $D_\xi(t) = 2 + 3t^6 + 4\cos^2 2t$

Часть XVIII

Лекция 10 (23.05.16)

5.2 Характеристики случайных процессов

1. Случайный процесс $\xi(t, \omega)$, где t — время

2. $\xi(t, x)$

3. $E_\xi(x_1, ..., x_n t_1, ..., t_n) = P(\xi(t_1) < x_1, ..., \xi(t_1) < x_n)$
4. $f(x, ..., x_n t_1, ..., t_n) = \frac{\partial F^N}{\partial x_1 ... \partial x_n}$
5. При фиксировании t получаем $F_\xi(x, t) = P(\xi(t) < x)$, $f_\xi(t, x) = \frac{\partial F_\xi}{\partial x}$
6. $M_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t, x) f_\xi(t, x) dx$
7. $D_\xi(t) = M(\xi(t) - M_\xi(t))^2 = M(\xi(t))^2 - (M_\xi(t))^2$
8. Пусть $\xi(t, x)$ - случайная функция; $\varphi(t)$ - регулярная функция
   (a) $M_\varphi(t) = \varphi(t)$
   (b) $M_{\varphi\xi}(t) = \varphi(t) M_\xi(t)$
   (c) $M_{\xi+\eta}(t) = M_\xi(t) + M_\eta(t)$
   (d) $D_\varphi(t) = 0$
   (e) $D_{\varphi\xi}(t) = (\varphi(t))^2 D_\xi(t)$
   (f) $D_{\varphi+\xi}(t) = D_\xi(t)$
9. $\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$ - комплекснозначный случайный процесс
10. $K_\xi(t_1, t_2)$ — автокорреляция (автоковариация) — связь между сечениями случайного процесса
    (a) $K_\xi(t_1, t_2) = M[(\xi(t_1) - M_\xi(t_1))(\xi(t_2) - M_\xi(t_2))] =$
    $= M[(\xi(t_1) - M_\xi(t_1))(\overline{\xi(t_2) - M_\xi(t_2)})]$
11. $K_{\xi\eta}(t_1, t_2)$ — связь между раззными случайными процессами
    (a) $K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = M[(\xi(t_1) - M_\xi(t_1))(\eta(t_2) - M_\eta(t_2))] =$
    $= M[(\xi(t_1) - M_\xi(t_1))(\overline{\eta(t_2) - M_\eta(t_2)})]$
12. Свойства:
    (a) $K_\xi(t_1, t_2) = K_\xi(t_2, t_1)$
    (b) $K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = K_{\eta\xi}(t_2, t_1) = \overline{K_{\eta\xi}(t_2, t_1)}$
    (c) $K_\varphi(t_1, t_2) = 0$
    (d) $K_{\varphi\xi}(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2) K\xi(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\overline{\varphi(t_2)} K_\xi(t_1, t_2)$
    (e) $K_{\varphi+\xi}(t_1, t_2) = K_\xi(t_1, t_2)$

(f) $K_\xi(t,t) = D_\xi(t)$

(g) $K_{\xi\eta}(t_1,t_2) \le \sqrt{D_\xi(t_1)D_\eta(t_2)}$ — неравенство Шварца

(h) $K_{\xi+\eta}(t_1,t_2) = K_\xi(t_1,t_2) + K_\eta(t_1,t_2) + K_{\xi\eta}(t_1,t_2) + K_{\eta\xi}(t_1,t_2)$

(i) $K_\xi(t_1,t_2) = M(\xi(t_1)\xi(t_2)) - M_\xi(t_1)M_\xi(t_2)$

13. Пример 1: $\xi(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, где A, ω — константы, φ — случайная величина. $f_\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & |x| \le \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$. Найти $M_\xi(t)$, $D_\xi(t)$, $K_\xi(t_1,t_2)$.

   (a) $M_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t,x) f_\xi(t,x)dx = \frac{A}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\omega t + \varphi)d\varphi =$
   $= \frac{A}{2\pi}\sin(\omega t + \varphi)|_{-\pi}^{\pi} = 0$

   (b) $K_\xi(t_1,t_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A\cos(\omega t_1 + \varphi)\cdot A\cos(\omega t_2+\varphi)d\varphi =$
   $= \frac{A^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(\omega(t_1+t_2)+2\varphi) + \cos(\omega(t_1-t_2)) =$
   $= \frac{A^4}{4\pi}\cos\omega(t_1-t_2)\varphi|_{-\pi}^{\pi} = \frac{A^2}{2}\cos(\omega(t_1-t_2))$

   (c) $D_\xi(t) = K_\xi(t,t) = \frac{A^2}{2}$

14. Определение: Каноническое разложение (или представление) случайного процесса, когда $\xi(t) = \varphi_0(t) + \xi_1\varphi_1(t) + ...\xi_n\varphi_n(t)$, где ξ_i — случайные величины, $M_{\xi_i} = 0\,\forall i$, $K_{\xi_i\xi_j} = \begin{cases} 0, & i \ne j \\ D_i > 0, & i = j \end{cases}$

   (a) $M_\xi(t) = \varphi_0(t)$

   (b) $K_\xi(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t_i)\overline{\varphi_i(t_2)}D_i$

   (c) $D_\xi(t) = K_\xi(t,t) = \sum_{i=1}^{n}|\varphi_i(t)|^2 D_i$

15. Пример 2: Дано каноническое разложение случайного процесса $\xi(t) = t^2 + \cos\omega t\xi_1 + \sin\omega t\xi_2 + e^{-3it}\xi_3 + 4i\sqrt{t}\xi_4$; $D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = 2$; $D_{\xi_3} = D_{\xi_4} = 5$. Найти $M_\xi(t)$, $D_\xi(t)$, $K_\xi(t_1,t_2)$.

   (a) $M_\xi(t) = t^2$

   (b) $K_\xi(t_1,t_2) = \cos\omega t_1 \cdot \cos\omega t_2 \cdot 2 + \sin\omega t_2 \cdot \sin\omega t_2 \cdot 2+$
   $+e^{-3it_1}e^{3it_2}\cdot 5 + 4i\sqrt{t_1}(-4i\sqrt{t_2})\cdot 5 =$
   $= 2\cos(\omega(t_1-t_2)) + 5e^{3i(t_2-t_1)} + 16\sqrt{t_1t_2}\cdot 5$

   (c) $D_\xi(t) = K_\xi(t,t) = 2 + 5 + 80t = 7 + 80t$

5.3 Линейные преобразования случайных процессов

1. Определение: $\xi(t)$ **сходится в среднеквадратическом** к случайной величине ξ_0 при $t \to t_0$ ($l.i.m._{t\to t_0}\xi(t) = \xi_0$), если $M(\xi(t) - \xi_0)^2 \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$.

2. Теорема: Если $\exists\, l.i.m._{t\to t_0}\xi(t) = \xi_0$, то $M(l.i.m_{t\to t_0}\xi(t)) = \lim_{t\to t_0} M_\xi(t)$.

3. Определение: Производная сучайного процесса $\xi'(t) = \frac{d\xi}{dt} = l.i.m._{\Delta t\to 0}\frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t}$

4. Теорема $M_{\xi'}(t) = (M_\xi(t))'$; $K_{\xi'}(t_1,t_2) = \frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial}{\partial t_2}K_\xi(t_1,t_2)$

5. Определение: Интеграл случайного процесса $\int_0^t \xi(\tau)d\tau = l.i.m._{\max\Delta\tau_k\to 0}\sum_{k=1}^n \xi(\tau$

6. Теорема: $\eta(t) = \int_0^t \xi(\tau)d\tau$; $M_\eta(t) = \int_0^t M_\xi(\tau)d\tau$; $K_\eta(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_\xi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$

7. Теорема: Пусть $\eta(t) = A\xi(t) + \varphi(t)$ — линейное преобразование, где A — линейное преобразование, $\varphi(t)$ — регулярная функция. Тогда $M_\eta(t) = AM_\xi(t) + \varphi(t)$; $K_\eta(t_1,t_2) = A_{t_1}A_{t_2}K_\xi(t_1,t_2)$; $D_\eta(t) = K_\eta(t,t)$.

8. Пример 1: $\eta(t) = t(\frac{d\xi}{dt} + e^{-t})$; $M_\xi(t) = \cos 3t$; $K_\xi(t_1,t_2) = t_1^2t_2^2$.. Найти $M_\eta(t)$, $K_\eta(t_1,t_2)$, $D_\eta(t)$.

   (a) $\eta(t) = t\frac{d\xi}{dt} + te^{-t}$

      i. $A\xi = t\frac{d\xi}{dt}$

      ii. $\varphi(t) = te^{-t}$

   (b) $M_\eta(t) = t(\cos 3t)' + te^{-t} = -3t\sin 3t + te^{-t}$

   (c) $K_\eta(t_1,t_2) = t_1t_2\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial}{\partial t_2}t_1^2t_2^2 = t_1t_2\cdot 2t_1\cdot 2t_2 = 4t_1^2t_2^2$

   (d) $D_\eta(t) = K_\xi(t,t) = 4t^4$

9. Пример 2: $\eta(t) = \sin t\int_0^t(\tau^3 - \xi(\tau))d\tau$; $M_\xi(t) = e^{5t}$; $K_\xi(t_1,t_2) = \sin 4t_1\sin 4t_2$. Найти M_η, D_η, $K_\eta(t_1,t_2)$.

   (a) $\eta(t) = \sin t\int_0^t \tau^3 d\tau - \sin t\int_0^t \xi(\tau)d\tau = \frac{t^4}{4}\sin t - \sin t\int_0^t\xi(\tau)d\tau$

   (b) $M_\eta(t) = \frac{t^4}{4}\sin t - \sin t\int_0^t e^{5\tau}d\tau = \sin t(\frac{t^4}{4} - \frac{e^{5t}-1}{5})$

   (c) $K_\eta(t_1,t_2) = \sin t_1\sin t_2\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\sin 4\tau_1\sin 4\tau_2 d\tau_1 d\tau_2 =$
   $= \frac{\sin t_1\sin t_2}{16}(-\cos 4t_1 + 1)(-\cos 4t_2 + 1)$

   (d) $D_\eta(t) = K_\eta(t,t) = \frac{\sin^2 t}{16}(1-\cos 4t)^2$

Часть XIX

Консультация (14.06.16)

1. 1.1,1.2 — случайные события

   (a) Студент из 20 вопросов выучил 5. Какова вероятность сдачи экзамена, если в билете, содержащем 4 вопроса, нужно ответить не менее, чем на 3 вопроса?

      i. A_1 — 3 вопроса

      ii. A_2 — 4 вопроса

      iii. $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$

      iv. $20(5) \to 4(3)$; $P(A_1) = \frac{C_5^3 C_{15}^1}{C_{20}^4}$

      v. $20(5) \to 4(4)$; $P(A_2) = \frac{C_5^4 C_{15}^0}{C_{20}^4}$

   (b) Количество студентов в 3х группах относится как 1 : 2 : 3. Количество отличников 10%, 30%, 15% соответственно. Из всех случайным образом выбирается 1 студент. Найти вероятность того, что выбранный студент — отличник. Найти вероятность того, что выбранный отличник из первой группы.

      i. H_1 — из 1 группы; $P(H_1) = \frac{1}{6}$; $P(A/H_1) = 0.1$

      ii. H_2 — из 2 группы; $P(H_2) = \frac{2}{6}$; $P(A/H_2) = 0.3$

      iii. H_3 — из 3 группы; $P(H_3) = \frac{3}{6}$; $P(A/H_3) = 0.15$

      iv. $P(A) = \sum P(H_i)P(A/H_i) = \frac{1}{6} \cdot 0.1 + \frac{1}{6} \cdot 0.6 + \frac{1}{6} \cdot 0.45$

      v. $P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot 0.6}{P(A)}$

   (c) В билете 5 вопросов. Вероятность ответа на любой из вопросов 0.3. Найти вероятность, что студент ответит более, чем на 3 вопроса.

      i. A — студент ответил на вопрос

      ii. $P(A) = 0.3$; $n = 5$

      iii. $P(k > 3) = P(k = 4) + P(k = 5) = C_5^4 0.3^4 0.7^1 + C_5^5 0.3^5 0.7^0$

2. 2.1,2.2 — случайные величины

   (a) Дискретные случайные величины, распределения

      i. Сигнал состоит из 2 точек и 1 тире. Вероятность искажения точки 0.1, а тире 0.2. Построить ряд раaспределения дискретной случайной величины ξ — числа искаженных символов. Найти $M\xi$, $D\xi$ и $F_\xi(x)$.

A.

-	-	-
-	-	+
-	+	-
+	-	-
-	+	+
+	+	-
+	-	+
+	+	+

ξ	p
0	$0.9^2 \cdot 0.8$
1	$2 \cdot 0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.8 + (0.9)^2 \cdot 0.2$
2	$(0.1)^2 \cdot 0.8 + 2 \cdot 0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.2$
3	$0.1^2 \cdot 0.2$

B. $M\xi = \sum \xi_i p_i$

C. $D\xi = \sum \xi_i^2 p_i - (M\xi)^2$

(b) Непрерывные случайные величины, распределения

i. Ошибка измерения прибора распределена по нормальному закону. Систематическая ошибка отсутствует. Какую максимальную по абсолютной величине ошибку можно допустить с вероятностью 0.9, если $\sigma = 3$мм?

A. $P(a \leq \xi \leq b) = \Phi(\frac{b-M}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-M}{\sigma})$

B. $P(|\xi - m| < \varepsilon) \approx 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})$

C. $0.45 = \Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})$; $\frac{\varepsilon}{\sigma} = 1.9$; $\varepsilon = 1.93$