

Часть I

Лекция 1 (1.09.15)

1 Алгебра высказываний

1. **Высказывание** - это утверждение, про которое всегда можно сказать, истинно оно или ложно.

(a) $A = \text{“число 5 четно”}$ - ложь

(b) $B = \text{“число 6 - четно”}$ - истина

(c) $A = \begin{cases} \text{И} \\ \text{Л} \end{cases} = \begin{cases} t \\ f \end{cases}$

(d) A - **атомарное** высказывание, а $A \vee B$ - **составное**.

i. $D = \overline{A} \& (A \vee B) \leftrightarrow (C \rightarrow A)$ - составное высказывание

2. Логические операции к высказываниям

(a) Конъюнкция ($A \& B$, A и B) {0001}

(b) Дизъюнкция ($A \vee B$, A или B) {0111}

(c) Отрицание ($\overline{A}$, не A) {10}

(d) Логическое следствие, импликация ($A \rightarrow B = \overline{A} \vee B$; если A , то B) {1011}

(e) Эквивалентность ($A \leftrightarrow B = (\overline{A} \& \overline{B}) \vee (A \& B) = (\overline{A} \vee B) \& (A \vee \overline{B})$; A тогда и только тогда, когда B) {0110}

3. Высказывание называется **логически истинным** (или **тавтологией**), если оно всегда принимает значение ИСТИНА.
4. Сложное высказывание называется **противоречием** или **логически ложным**, если оно всегда принимает значение ЛОЖЬ.
5. Два высказывания называются **логически эквивалентными**, если для любого истинностного означивания эти высказывания принимают одинаковые значения.
6. Множество логических связей Σ называется **полным**, если для любого высказывания существует логически эквивалентное ему высказывание, содержащее только связки из множества Σ .

ABC	F	СДНФ	СКНФ
ЛЛЛ	Л	$A \vee B \vee C$	
ЛЛИ	И		$\overline{A} \& \overline{B} \& C$
ЛИЛ	И		$A \& \overline{B} \& C$
ЛИИ	Л	$A \vee \overline{B} \vee \overline{C}$	
ИЛЛ	Л	$\overline{A} \vee B \vee C$	
ИЛИ	Л	$\overline{A} \vee B \vee \overline{C}$	
ИИЛ	И		$A \& B \& \overline{C}$
ИИИ	Л	$A \vee B \vee C$	

8. $S = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ - **множество** высказываний.

(a) Высказывание A - **логическое следствие** высказываний $H_1, \dots, H_n$ ($S \models A$), если всякий раз, когда все H_i равны истине, значение A также равно истине.

(b) Множество высказываний S называется **семантически непротиворечивым**, если существует истинностное означивание, которое подтверждает каждое высказывание из S (при этом означивании H_i принимает значение истины).

(c) Множество высказываний S называется **противоречивым**, если какое-либо истинностное означивание не подтверждает хотя-бы одно из высказываний H_i .

Часть II

Семинар 1 (1.09.15)

Примеры

1. $((A \rightarrow B) \& \overline{C}) \sim \overline{B} \equiv$

(a)

A	B	C	$A \rightarrow B$	$\overline{C}$	1&2	$\overline{B}$	3 ~ 4
f	f	f	t	t	t	t	t
f	f	t	t	f	f	t	f
f	t	f	t	t	t	f	f
f	t	t	t	f	f	f	t
t	f	f	f	t	f	t	f
t	f	t	f	f	f	t	f
t	t	f	t	t	t	f	f
t	t	t	t	f	f	f	t

(b) $\equiv (\overline{A} \& \overline{B} \& \overline{C}) \vee (\overline{A} \& B \& C) \vee (A \& B \& C) \equiv$ - СНДФ

(c) $\equiv (A \vee B \vee \overline{C}) \& (A \vee \overline{B} \vee C) \& (\overline{A} \vee B \vee C) \& (\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \& (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)$ - СКНФ

Часть III

Лекция 2 (8.09.15)

Примеры

Задача 1

1. Следователь допрашивал трех свидетелей К Ж и Д. Их противопозаказания противоречили друг другу и каждый обвинял кого-нибудь во лжи:

(a) К утверждает, что Ж лжет: $(K \wedge \overline{J}) \vee (\overline{K} \wedge J)$

(b) Ж обвиняет во лжи Д: $(J \wedge \overline{D}) \vee (\overline{J} \wedge D)$

(c) Д уговаривал не верить ни К, ни Ж: $(D \wedge (\overline{K} \wedge \overline{J})) \vee (\overline{D} \wedge (K \vee J))$

2. Решение:

(a) $[(K \wedge \overline{J}) \vee (\overline{K} \wedge J)] \wedge [(J \wedge \overline{D}) \vee (\overline{J} \wedge D)] \wedge [(D \wedge (\overline{K} \wedge \overline{J})) \vee (\overline{D} \wedge (K \vee J))] =$

(b) ...

(c) $= \overline{K} \wedge J \wedge \overline{D}$

2 Семантические таблицы

1. Помеченные формулы

(a) $f(a)$ - “a - ложно”

(b) $t(a)$ - “a - истинно”

2. Вершинами семантической таблицы (дерева) являются все помеченные формулы, встречающиеся в этой таблице.

3. Элементарные деревья (атомарные таблицы)

(a) $t(a), f(a)$

- (b) $t(\bar{a}) \longrightarrow f(a), f(\bar{a}) \longrightarrow t(a)$
- (c) $t(a \wedge b) \longrightarrow t(a) \longrightarrow t(b), f(a \wedge b) \Rightarrow \begin{matrix} f(a) \\ f(b) \end{matrix}$
- (d) $t(a \vee b) \Rightarrow \begin{matrix} t(a) \\ t(b) \end{matrix}, f(a \vee b) \longrightarrow f(a) \longrightarrow f(b)$
- (e) $t(a \leftrightarrow b) \Rightarrow \begin{matrix} t(a) \longrightarrow t(b) \\ f(a) \longrightarrow f(b) \end{matrix}, f(a \leftrightarrow b) \Rightarrow \begin{matrix} t(a) \longrightarrow f(b) \\ f(a) \longrightarrow t(b) \end{matrix}$
- (f) $f(a \rightarrow b) \longrightarrow t(a) \longrightarrow f(b), t(a \rightarrow b) \Rightarrow \begin{matrix} f(a) \\ t(b) \end{matrix}$

4. Вершина семантической таблицы называется **особой**, если она включается как корень в некоторой атомарной семантической таблице. В противном случае вершина называется **обычной**.
5. Ветвь семантической таблицы называется **противоречивой**, если для некоторого высказывания a в этой ветви встречаются вершины, помеченные $t(a)$ и $f(a)$.
6. Семантическая таблица называется **замкнутой**, если каждая её непротеворечивая ветвь не содержит обычных вершин.
7. Семантическая таблица называется **противоречивой**, если все её ветви противоречивы.
8. Мы строим семантическую таблицу до тех пор, пока все непротеворечивые ветви не содержат обычных вершин.
9. **Доказательством** или **выводом по Бету** высказывания a называется противоречивая замкнутая семантическая таблица, в корне которой стоит утверждение $f(a)$. Говорят, что высказывание **доказуемо по Бету** ($\rightarrow_B a$).
10. Замкнутая противоречивая семантическая таблица, в корне которой будет стоять высказывание $t(a)$, называется **опровержением по Бету** высказывания a (a будет противоречием, т.е. всегда ложно).

Примеры

1. $f(((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A) \longrightarrow t((A \rightarrow B) \rightarrow A) \longrightarrow f(A) \Rightarrow \begin{matrix} f(A \rightarrow B) \longrightarrow t(A) \longrightarrow t(B) \longrightarrow X \\ t(A) \longrightarrow X \end{matrix}$ - замкнутая противоречивая семантическая таблица
2. $t(((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A) \Rightarrow \begin{matrix} f((A \rightarrow B) \rightarrow A) \longrightarrow t(A \rightarrow B) \longrightarrow f(A) \Rightarrow \begin{matrix} f(A) \\ t(B) \end{matrix} \\ t(A) \end{matrix}$
3. $t((A \wedge \bar{A}) \vee (B \vee (C \wedge D))) \Rightarrow \begin{matrix} t(A \wedge \bar{A}) \longrightarrow t(A) \longrightarrow t(\bar{A}) \longrightarrow f(a) \longrightarrow X \\ t(B \vee (C \wedge D)) \Rightarrow \begin{matrix} t(B) \\ t(C \wedge D) \longrightarrow t(C) \longrightarrow t(D) \end{matrix} \end{matrix}$

$$(a) \quad t(D); t(C); \begin{Bmatrix} t(A) \\ f(A) \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} t(B) \\ f(B) \end{Bmatrix}$$

$$(b) \quad t(B); \begin{Bmatrix} t(A) \\ f(A) \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} t(C) \\ f(C) \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} t(D) \\ f(D) \end{Bmatrix}$$

Часть IV

Семинар 2 (15.09.15)

Примеры

1. $f[(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))] \Rightarrow$
 $t(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow f((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \rightarrow t(A) \rightarrow t(B \vee C) \Rightarrow \begin{matrix} t(B) \rightarrow f(A \wedge B) \rightarrow f(A \wedge C) \\ t(C) \rightarrow f(A \wedge B) \rightarrow f(A \wedge C) \end{matrix}$
 $f(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow t((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \Rightarrow \begin{matrix} f(A) \Rightarrow t(A \wedge B) \rightarrow t(A) \rightarrow t(B) \rightarrow X \\ t(A \wedge C) \rightarrow t(A) \rightarrow t(C) \rightarrow X \end{matrix}$
 $f(B \vee C) \rightarrow f(B) \rightarrow f(C) \Rightarrow \begin{matrix} t(A \wedge B) \\ t(A \wedge C) \end{matrix}$
 $\rightarrow f(A) \rightarrow X$
 $\rightarrow f(B) \rightarrow X$
 $f(A) \rightarrow X$
 $f(B) \rightarrow \begin{matrix} f(A) \rightarrow X \\ f(C) \rightarrow X \end{matrix}$
 $\rightarrow t(A) \rightarrow t(B) \rightarrow X$
 $\rightarrow t(A) \rightarrow t(C) \rightarrow X$
2. $f((A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \vee B)) \Rightarrow \begin{matrix} t(A \rightarrow B) \rightarrow f(A \vee B) \Rightarrow f(A) \rightarrow f(A) \rightarrow f(B) \\ t(B) \rightarrow f(A) \rightarrow f(B) \rightarrow X \end{matrix}$
 $f(A \rightarrow B) \rightarrow t(A \vee B) \rightarrow t(A) \rightarrow f(B) \Rightarrow \begin{matrix} t(A) \\ t(B) \end{matrix} \rightarrow X$
3. $t(((B \rightarrow \bar{A}) \wedge \bar{C}) \leftrightarrow C) \wedge \bar{B} \rightarrow t((B \rightarrow \bar{A}) \wedge \bar{C}) \leftrightarrow C) \rightarrow t(\bar{B}) \rightarrow t(B)$
 - (a) $t((B \rightarrow \bar{A}) \wedge \bar{C}) \rightarrow t(C) \rightarrow t(C) \rightarrow t(B \rightarrow \bar{A}) \rightarrow t(\bar{C}) \rightarrow f(C) \rightarrow X$
 - (b) $f((B \rightarrow \bar{A}) \wedge \bar{C}) \rightarrow f(C) \Rightarrow \begin{matrix} f(B \rightarrow \bar{A}) \rightarrow t(B) \rightarrow f(\bar{A}) \rightarrow t(A) \rightarrow X \\ f(\bar{C}) \rightarrow t(C) \rightarrow X \end{matrix}$

Часть V

Лекция 3 (15.09.15)

3 Аксиоматическая система вывода

1. Аксиомы:
 - (a) $\varphi \rightarrow (\tau \rightarrow \varphi)$
 - (b) $(\varphi \rightarrow (\tau \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \tau) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$
 - (c) $(\bar{\varphi} \rightarrow \bar{\tau}) \rightarrow (\tau \rightarrow \varphi)$
2. Правило заключения (правило вывода):
 - (a) Пусть:
 - i. φ
 - ii. $\varphi \rightarrow \tau$
 - (b) Тогда:
 - i. Из этих двух высказываний выводится высказывание τ .
 - ii. $\begin{cases} \varphi \\ \varphi \rightarrow \tau \end{cases}$ - гипотеза; τ - заключение

3. Пример: $A \rightarrow A$

- (a) Берем первую аксиому: $\varphi = A; \tau = B \rightarrow A$
 - i. $A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$
- (b) Берем вторую аксиому: $\varphi = A; \tau = B \rightarrow A; \sigma = A$
 - i. $(A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$
 - ii. $\varphi = (A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A))$
 - iii. $\tau = ((A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$
- (c)
$$\left\{ \begin{array}{l} (A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A) \\ (A \rightarrow (B \rightarrow A)) \end{array} \right\} \vdash (A \rightarrow A)$$

3.1 Теорема о подстановке эквивалентных форм

1. Пусть:

- (a) $\sigma \leftrightarrow \sigma_1$ - выводимо в логике высказываний
- (b) σ - подформула высказывания φ
- (c) φ_1 получено из высказывания φ в результате подстановки вместо некоторых вхождений подформулы σ эквивалентной ей формулы σ_1 .

2. Тогда:

- (a) $\varphi \leftrightarrow \varphi_1$ также выводимо в логике высказываний. $\vdash (\sigma \leftrightarrow \sigma_1) \Leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \varphi_1)$

3.2 Формальное определение выводимости (доказательства) высказывания

1. Пусть:

- (a) S - множество высказываний

2. Тогда:

- (a) **Доказательством** (или **выводом**) из множества S называется такая конечная последовательность высказываний $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, что для каждого $i, 1 \leq i \leq n$ выполнено одно из высказываний:
 - i. $\sigma_i \in S$
 - ii. σ_i - аксиома
 - iii. $\sigma_i, \sigma_k \vdash \sigma_i, 1 \leq j, k \leq i$

- 3. Высказывание σ называется **доказуемым** (или **выводимым**) из множества высказываний S , если существует доказательство $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, где $\sigma_n \equiv \sigma$. $S \vdash \sigma$
- 4. Высказывание σ называется **доказуемым** (или **выводимым**), если оно выводимо из аксиом и множество S - пустое.
- 5. Если множество S бесконечно, то любое выводимое из множества S высказывание σ будет также выводимо и из некоторого конечного множества, так как доказательство всегда конечно.

3.3 Теорема дедукции

1. Пусть:

- (a) S - множество высказываний
- (b) K, L - высказывания

2. Тогда:

- (a) $S \cup \{K\} \vdash L \iff S \vdash (K \rightarrow L)$

Примеры

1. $\{A\} \vdash (\overline{B} \rightarrow (C \rightarrow A)) = \sigma$
 - (a) $\sigma_1 = A$
 - (b) $\sigma_2 = (A \rightarrow (C \rightarrow A))$
 - (c) $\sigma_3 = C \rightarrow A$
 - (d) $\sigma_4 = (C \rightarrow A) \rightarrow (\overline{B} \rightarrow (C \rightarrow A))$
 - (e) $\sigma_5 = \overline{B} \rightarrow (C \rightarrow A) = \sigma$

Часть VI

Лекции 4,5 (22,29.09.15) [Пропущено]

Часть VII

Лекция 6 (6.09.15)

4 Кванторы и предикаты

1. Предикаты — утверждения, содержащие переменные и принимающие значение истины или лжи в зависимости от значений переменных.
2. Кванторы — операторы, применение которых к предикатам превращает их в ложные или истинные.
 - (a) $\forall x$ — квантор всеобщности — “для всех x верно условие ...”
 - (b) $\exists x$ — квантор существования — “существует такой x , что ...”
3. Свойства кванторов:
 - (a) $\overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P(x)}$
 - (b) $\overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \overline{P(x)}$
 - (c) $\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$
 - (d) $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$
 - (e) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
 - (f) $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
 - (g) $\forall x (P(x) \vee Q(y)) \equiv \forall x P(x) \vee Q(y)$
 - (h) $\exists x (P(x) \wedge Q(y)) \equiv \exists x P(x) \wedge Q(y)$
4. Пример: $D(x_1, x_2)$ — “натуральное число x_1 делится нацело на x_2 ”
 - (a) $\forall x_1 \forall x_2 D(x_1, x_2) = \text{Л}$ (ложь) — любое x_1 делится на любое x_2
 - (b) $\exists x_1 \exists x_2 D(x_1, x_2) = \text{И}$ (истина)
 - (c) $\forall x_1 \exists x_2 D(x_1, x_2) = \text{И}$ — для любого x_1 существует x_2 , на которое он делится нацело
 - (d) $\exists x_1 \forall x_2 D(x_1, x_2) = \text{Л}$ — существует x_1 , которое делится на любое x_2
 - (e) $\forall x_2 \forall x_1 D(x_1, x_2) = \text{Л}$
 - (f) $\exists x_1 \exists x_2 D(x_1, x_2) = \text{И}$
 - (g) $\forall x_2 \exists x_1 D(x_1, x_2) = \text{И}$
 - (h) $\exists x_2 \forall x_1 D(x_1, x_2) = \text{И}$ (выполняется при $x_2 = 1$, поэтому истина)

- (i) Вывод: Нельзя менять местами разные кванторы. Перестановка одинаковых кванторов на результат не влияет.
5. Определение: **Подстановочное множество** (или **подстановка**) — это множество $\Theta = \{ \frac{u_1}{s_1}, \dots, \frac{u_m}{s_m} \}$
- (a) u_i — переменные
 - (b) s_i — термы
 - (c) $u_k = u_j \Rightarrow s_k = s_j$
 - (d) $\varphi(\Theta)$ означает, что в Θ заменили все u_i на s_i
6. Определение:
- (a) Пусть:
 - i. Даны две подстановки:
 - ii. $\Theta = \{u_1/s_1, \dots, u_m/s_m\}$
 - iii. $\Psi = \{v_1/t_1, \dots, v_n/t_n\}$
 - (b) Тогда:
 - i. **Композицией подстановок** Θ и Ψ называется подстановка, которая получена применением подстановки Ψ к термам $s_1, \dots, s_m$ в подстановке Θ , а затем дополнением полученного множества элементами множества Ψ .
 - ii. $\Theta\Psi = \{u_1/s_1\Psi, \dots, u_m/s_m\Psi\} \cup \{v_1/t_1, \dots, v_n/t_n\} - \{u_i/s_i\Psi | u_i \equiv s_i\Psi\} - \{v_j/t_j | v_j \equiv u_i\}$
 - iii. $\varphi(\Theta\Psi) = (\varphi\Theta)\Psi$
 - (c) Пример: $\Theta = \{x/f(y), y/z\}$; $\Psi = \{x/a, y/b, z/y\}$
 - i. $\Theta\Psi = \{x/f(b), y/y\} \cup \{x/a, y/b, z/y\} - \{y/y\} - \{x/a, y/b\} = \{x/f(b), z/y\}$
 - (d) Свойства:
 - i. $\Theta E = E\Theta = \Theta$, где E — **пустая подстановка**
 - (e) Пример: $t = \omega(f(v_1), b(x), f(v_2), v_3)$, $\Theta = \{v_1/f(g(x)), v_2/h(v_1), v_3/h(v_3)\}$, $\Psi = \{x/z, v_1/v_2, v_3/v_1\}$
 - i. $\Theta\Psi = \{v_1/f(g(z)), v_2/h(v_2), v_3/h(v_1), x/z\}$
 - ii. $(t)(\Theta\Psi) = \omega(f(f(g(z))), h(z), h(v_2), h(v_1))$
 - iii. Проверка:
 - A. $t\Theta = \omega(f(f(g(x))), h(x), f(h(v_1)), h(v_3))$
 - B. $(t\Theta)\Psi = \omega(f(f(g(z))), h(z), f(h(v_2)), h(v_1)) = (t)(\Theta\Psi)$ — верно

4.1 Нормальные формы в логике предикатов

1. **Формами** называются формулы специального вида.
2. Нормальные формы:
 - (a) ПНР — предваренная нормальная форма
 - i. Формула φ находится в ПНФ, если она имеет вид $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\dots(Q_nx_n)\sigma$, где $Q_i = \begin{cases} \forall \\ \exists \end{cases}$, а σ — формула без кванторов, где используются только логические операции конъюнкция, дизъюнкция и отрицание.
 - ii. Чтобы привести формулу к такому виду, нужно использовать эквивалентности логики высказываний и предикатов.
 - (b) СНФ — Сколемовская нормальная форма
 - i. Принимает значение истины тогда и только тогда, когда исходная ПНФ принимает значение истины.
 - ii. В этой форме используются только кванторы всеобщности $\forall$.

iii. $(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_n)\sigma$ — формула φ в СНФ

Часть VIII

Семинар 4

1. Найти композицию подстановок:

$$\Theta = \{x/f(z); y/z; z/x; w/x\}$$

$$\gamma = \{x/a; w/b; z/x\}$$

(a) Заменяем переменные в знаменателях первой подстановки согласно второй: $\{x/f(x); y/x; z/a; w/a\}$

(b) Добавляем неповторяющиеся подстановки: (ничего добавлять)

(c) Убираем подстановки с одинаковым числителем и знаменателем: (таких нет)

$$(d) \Theta\gamma = \{x/f(x); y/x; z/a; w/a\}$$

$$(e) \gamma\Theta = \{x/a; w/b; z/f(z)\} + \{y/z\} = \{x/a; w/b; z/f(z); y/z\}$$

2. $(\forall z)(D(x, y, z)) \leftrightarrow ((\exists x)(A(x, y)) \vee (\forall y)(B(x, y)))$

(a) Заменяем конфликтующие связанные переменные: $(\forall z)(D(x, y, z)) \leftrightarrow ((\exists u)(A(u, y)) \vee (\forall t)(B(x, t))) =$

$$\begin{aligned} (b) &= [(\forall z)(D(x, y, z)) \wedge ((\exists u)(A(u, y)) \vee (\forall t)(B(x, t)))] \vee [\overline{(\forall z D(x, y, z))} \wedge \overline{(\exists u A(u, y) \vee \forall t B(x, t))}] = \\ &= [(\forall z)(D(x, y, z)) \wedge ((\exists u)(A(u, y)) \vee (\forall t)(B(x, t)))] \vee [\exists z \overline{D(x, y, z)} \wedge (\forall u \overline{A(u, y)} \wedge \exists t \overline{B(x, t)})] = \\ &= [\forall z D(x, y, z) \wedge (\exists u A(u, y) \vee \forall t B(x, t))] \vee [\exists z \overline{D(x, y, z)} \wedge (\forall u \overline{A(u, y)} \wedge \exists t \overline{B(x, t)})] = \\ &= \forall z \exists u \forall t [D(x, y, z) \wedge (A(x, y) \vee B(x, t))] \vee \exists z \forall u \exists t [\overline{D(x, y, z)} \wedge (\overline{A(u, y)} \wedge \overline{B(x, t)})] = \end{aligned}$$

(c) Снова заменим разные несвязанные переменные:

$$\begin{aligned} (d) &= \forall z \exists u \forall t [D(x, y, z) \wedge (A(x, y) \vee B(x, t))] \vee \exists v \forall \tau \exists \omega [\overline{D(x, y, v)} \wedge (\overline{A(\tau, y)} \wedge \overline{B(x, \omega)})] = \\ &= \forall z \exists v \exists u \forall \tau \forall t \exists \omega \{ [D(x, y, z) \wedge (A(x, y) \vee B(x, t))] \vee [\overline{D(x, y, v)} \wedge \overline{A(\tau, y)} \wedge \overline{B(x, \omega)}] \} = Q(x, y) — двуместный предикат \end{aligned}$$

3. Самостоятельно: $\exists x A(x, z) \leftrightarrow \forall y B(y, z)$

$$(a) = [(\exists x A(x, z)) \wedge (\forall y (B(y, z)))] \vee [\overline{(\exists x A(x, z))} \wedge \overline{(\forall y B(y, z))}] =$$

$$(b) = [\exists x A(x, z) \wedge \forall y B(y, z)] \vee [\overline{\exists x A(x, z)} \wedge \overline{\forall y B(y, z)}] =$$

$$(c) = \exists x \forall y [A(x, z) \wedge B(y, z)] \vee \forall u \exists v [\overline{A(u, z)} \wedge \overline{B(v, z)}] =$$

$$(d) = \exists x \forall y \forall u \exists v \{ A(x, z) \wedge B(y, z) \vee \overline{A(u, z)} \wedge \overline{B(v, z)} \} = Q(z)$$

Часть IX

Лекция 7 (13.10.15)

4.1.1 Алгоритм преобразования произвольной формулы к ПНФ

1. Заменяем все логические операции выражениями, содержащими только конъюнкцию и дизъюнкцию.
2. Опускаем все отрицания до элементарных формул.
3. Выносим все кванторы за скобку, заменяя связанные переменные, если необходимо.

Пример: Семинар 4, пункты 2,3

4.1.2 Алгоритм преобразования ПНФ к СНФ

1. Последовательно слева направо вычеркиваем из ПНФ каждый квантор существования $\exists y$, заменяя все вхождения этой переменной y на новый функциональный символ $f(\dots)$, который еще не использовался, а в качестве аргументов функции $f(\dots)$ берем все переменные, связанные кванторами всеобщности $\forall$ и стоящие перед этим квантором $\exists y$. Этот функциональный символ $f(\dots)$ называется **сколемовской функцией**.
2. Повторяем первый пункт для каждого квантора существования $\exists$.
3. Если квантор существования $\exists$ стоит в начале формулы, то вместо переменной подставляется константа.

4.2 Метод семантических таблиц в логике предикатов

1. Будем рассматривать частный случай формул, где не используются функциональные символы. Более общий случай называется методом **систематических таблиц**.
2.
 - $t(\forall x P(x)) \rightarrow t(P(x))$ для всех x
 - $f(\exists x P(x)) \rightarrow f(P(x))$ для всех x
 - $f(\forall x P(x)) \rightarrow f(P(x))$ для некоторого x
 - $t(\exists x P(x)) \rightarrow t(P(x))$ для некоторого x

Часть X

Лекция 8 (20.10.15)

4.3 Аксиоматические основания логики предикатов

1. Определение: Переменная x **свободна** для терма t в формуле σ ($free(x, t, \sigma)$), если никакая из переменных терма t не становится связанной после подстановки терма t на все места свободного вхождения переменной x в формуле σ .

(а) Пример: $\forall x P(x, y) \rightarrow \{y/f(z)\} \rightarrow \forall x P(x, f(z))$ — переменная y свободна для терма $f(z)$ в формуле $\forall x P(x, y)$

2. Аксиомы:

- (а) $\varphi \rightarrow (\tau \rightarrow \varphi)$
- (б) $(\varphi \rightarrow (\tau \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \tau) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$
- (в) $(\overline{\varphi} \rightarrow \overline{\tau}) \rightarrow (\tau \rightarrow \varphi)$
- (г) $free(x, t, \sigma): \forall x \sigma \rightarrow \sigma(x/t)$
- (д) $\overline{free(x, t, \sigma)}: \forall x (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow (\sigma \rightarrow \forall x (\tau))$

3. Правила вывода:

- (а) Правило заключения: $\varphi, \varphi \rightarrow \tau \vdash \tau$
- (б) Правило обобщения: $\varphi \vdash \forall x (\varphi)$

4. Теорема (об эквивалентной замене): Если формула A_1 получается формулы A путем замены некоторых вхождений подформулы B на подформулу B_1 и выполняется условие $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (B \leftrightarrow B_1)$, где $x_1, \dots, x_n$ — свободные переменные формул B и B_1 . Если все это выполнено, то $\vdash A \leftrightarrow A_1$.
5. Теорема дедукции: Пусть S — множество формул логики предикатов, A, B — такие формулы логики предикатов, что $S \cup \{A\} \vdash B$ и правило обобщения не применяется в процессе вывода B к свободным переменным формулы A . Тогда $S \vdash A \rightarrow B$.

4.4 Дизъюнкты. Метод резолюции

1. Рассматриваем только те формулы, в которых все переменные связаны кванторами. Такие формулы называются **предложениями**.
2. $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (C_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_m)$
 - (a) C_i — литерал
 - (b) x_j — все переменные, встречающиеся в C_i
3. Определение: Предложение, полученное из дизъюнкта путем удаления кванторов и подстановки вместо всех переменных констант называется **основным примером** предложения.
4. Определение: **Хорновским дизъюнктом** дизъюнкт вида $\forall x_1 \dots \forall x_n (A \leftarrow B_1, \dots, B_k)$
 - (a) $B_1, \dots, B_k$ — предпосылки
 - (b) A — заключение
5. Определение: **Фактом** называется хорновский дизъюнкт, в котором нет ни одной предпосылки.
6. Переименование переменных в атомах (элементарных формулах) называется **нормализацией**.
7. Пример: $S = \{\{\neg P(x, y), \neg P(y, z), P(x, z)\}, \{\neg P(u, v), P(v, u)\}\} \longrightarrow \{\neg P(x, y), \neg P(z, y), P(x, z)\}$
 - (a) Замена для 2 формулы: $\{u/x, v/z\}: \{\neg P(x, z), P(z, x)\}$ (3)
 - (b) Резолюция 1 и 3 формулы: $\{\neg P(x, y), \neg P(y, z), P(z, x)\}$
 - (c) Замена для 2 формулы: $\{u/z, v/x\}: \{\neg P(z, x), P(x, z)\}$ (4)
 - (d) Резолюция 3 и 4 формулы: $\{\neg P(x, y), \neg P(y, z), P(x, z)\}$
 - (e) Замена для 2 формулы: $\{u/z, v/y\}: \{\neg P(z, y), P(y, z)\}$
 - (f) Резолюция для ... формулы: $\{\neg P(z, y), \neg P(x, y), P(x, z)\}$

Часть XI

Семинар 5 (27.10.15)

1. $(\forall x)(P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}) \leftrightarrow \neg((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x))$ (в черновике)
2. $\forall z D(x, y, z) \leftrightarrow (\exists x A(x, y) \vee \exists y B(x, y)) =$
 - (a) $= [\forall z \overline{D(x, y, z)} \wedge (\exists x \overline{A(x, y)} \vee \exists y \overline{B(x, y)})] \vee [\forall z D(x, y, z) \wedge (\exists x A(x, y) \vee \exists y B(x, y))] =$
 - (b) $= [\exists z \overline{D(x, y, z)} \wedge \forall x \overline{A(x, y)} \wedge \forall y \overline{B(x, y)}] \vee [\forall z D(x, y, z) \wedge \exists t \exists \tau (A(t, y) \vee B(x, \tau))] =$
 - (c) $= \exists z \forall u \forall v [\overline{D(x, y, z)} \wedge \overline{A(u, y)} \wedge \overline{B(x, v)}] \vee \exists t \exists \tau \forall z [D(x, y, z) \wedge (A(t, y) \vee B(x, \tau))] =$
 - (d) $= \exists z \exists t \exists \tau \forall \xi \forall u \forall v \{[\overline{D(x, y, z)} \wedge \overline{A(u, y)} \wedge \overline{B(x, v)}] \vee [D(x, y, \xi) \wedge (A(t, y) \vee B(x, \tau))]\} =$ - ПНФ, двуместный предикат (две свободных переменных)
 - (e) $= \exists t \exists \tau \forall \xi \forall u \forall v \{[\overline{D(x, y, a)} \wedge \overline{A(u, y)} \wedge \overline{B(x, v)}] \vee [D(x, y, \xi) \wedge (A(t, y) \vee B(x, \tau))]\} =$
 - (f) $= \exists \tau \forall \xi \forall u \forall v \{[\overline{D(x, y, a)} \wedge \overline{A(u, y)} \wedge \overline{B(x, v)}] \vee [D(x, y, \xi) \wedge (A(b, y) \vee B(x, \tau))]\} =$
 - (g) $= \forall \xi \forall u \forall v \{[\overline{D(x, y, a)} \wedge \overline{A(u, y)} \wedge \overline{B(x, v)}] \vee [D(x, y, \xi) \wedge (A(b, y) \vee B(x, c))]\} =$ - СНФ

Часть XII

Семинар 6 (27.10.15)

Подготовка к контрольной работе 3.11.15

1. Пример 1:

(a) Дано:

- i. А: Джон любит еду
- ii. Б: Яблоки — это еда
- iii. В: Циплята — это еда
- iv. Г: Все, что можно съесть, и при этом не умереть, — это еда
- v. Д: Билл ест и все еще жив
- vi. Е: Мэри ест все, что ест Билл

(b) Введем предикаты:

- i. $L(x, y)$ — x любит y
- ii. $P(x)$ — x является едой
- iii. $E(x, y)$ — x ест y
- iv. $J(x)$ — x жив

(c) Предложения:

- i. А: $\forall x (L(\text{Джон}, x) \vee \overline{P(x)})$
- ii. Б: $P(\text{Яблоки})$?
- iii. В: $P(\text{Циплята})$?
- iv. Г: $\forall x \forall y (\overline{E(x, y)} \vee \overline{J(x)} \vee P(y))$ или $\forall x \forall y ((E(x, y) \wedge J(x)) \rightarrow P(y))$
- v. Д: $\forall x (E(\text{Билл}, x) \wedge J(\text{Билл}))$?
- vi. Е: $\forall x (E(\text{Билл}, x) \leftrightarrow E(\text{Мэри}, x))$?

2. Пример 2:

(a) Дано:

- i. Всякий дракон, живущий в зоопарке, несчастен

(b) Введем предикаты:

- i. $Dr(x)$ — x является драконом
- ii. $Schast(x)$ — x счастлив
- iii. $Jivet(x, y)$ — x живет в y

(c) Решение:

- i. $\forall x ((Dr(x) \wedge Jivet(x, \text{Зоопарк})) \rightarrow \overline{Schast(x)})$

3. Пример 3:

(a) Дано:

- i. Питер — вор
- ii. Мэри любит шоколад
- iii. Мэри любит вино
- iv. Питер любит деньги
- v. Питер любит x , если x любит вино
- vi. x может украсть y , если x — вор и x любит y

(b) Предикаты:

- i. $Вор(x)$ — x является вором
- ii. $Любит(x, y)$ — x любит y
- iii. $МожетУкрасть(x, y)$ — x может украсть y

(c) Высказывания:

- i. $Вор(\text{Питер})$
- ii. $Любит(\text{Мэри}, \text{Шоколад})$
- iii. $Любит(\text{Мэри}, \text{Вино})$

- iv. Любит(Питер, Деньги)
- v. $\forall x(\text{Любит}(x, \text{Вино}) \rightarrow \text{Любит}(\text{Питер}, x)) =$
 $= \{\text{Любит}(x, \text{Вино}), \text{Любит}(\text{Питер}, x)\}$
- vi. $\forall x \forall y((\text{Любит}(x, y) \wedge \text{Вор}(x)) \rightarrow \text{МожетУкрасть}(x, y)) =$
 $= \{\text{Любит}(x, y), \text{Вор}(x), \text{МожетУкрасть}(x, y)\}$
- (d) Резолюции:
 - i. $S_7: x = \text{Питер}; y = \text{Деньги}: S_4 + S_6 = \{\overline{\text{Вор}(\text{Питер})}, \text{МожетУкрасть}(\text{Питер}, \text{Деньги})\}$
 - ii. $S_8: S_7 + S_1 = \{\text{МожетУкрасть}(\text{Питер}, \text{Деньги})\}$
 - iii. $S_9: x = \text{Мэри}: S_3 + S_5 = \{\text{Любит}(\text{Питер}, \text{Мэри})\}$
 - iv. $S_{10}: x = \text{Питер}; y = \text{Мэри}: S_9 + S_6 = \{\overline{\text{Вор}(\text{Питер})}, \text{МожетУкрасть}(\text{Питер}, \text{Мэри})\}$
 - v. $S_{11}: S_1 + S_{10} = \{\text{МожетУкрасть}(\text{Питер}, \text{Мэри})\}$
- 4. Пример 4: $S = \{\forall x \overline{P(x, x)}, \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \rightarrow (P(y, z) \rightarrow P(x, z)))\} \vdash \exists x \exists y (P(x, y) \wedge P(y, x))$
 - (a) Дизъюнкты: $\{\overline{P(x, x)}\}, \{\overline{P(x, y)}, \overline{P(y, z)}, P(x, z)\}, \{P(a, b)\}, \{P(b, a)\}$

Часть XIII

Лекция 9 (10.11.15)

5 Теория алгоритмов

5.1 Машина Тьюринга

1. $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ — алфавит
2. $\alpha = \tilde{\alpha} = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$ — слово в алфавите A
3. A^* — множество всех слов в алфавите A
4. $y = f(x_1, \dots, x_n)$ — функция, где x_i и y — целые, неотрицательные числа
5. Машина Тьюринга: $T = \{A, Q, F, G, H\}$, где:
 - (a) $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ — конечное множество, называемое алфавитом
 - (b) $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ — конечное множество, называемое множеством состояний
 - (c) $F(a_i, q_j) = a' \in A$
 - (d) $G(a_i, q_j) = q' \in Q$
 - (e) $H(a_i, q_j) = \begin{cases} L & \text{влево} \\ R & \text{вправо} \\ S & \text{стоп} \end{cases}$ — функция управления
6.

$\wedge$	$\wedge$	a_{i_1}	a_{i_2}	$\dots$	a_{i_l}	$\wedge$	$\wedge$
		$\hat{q}_j$					

 $\xrightarrow{a_{i_1} q_j \rightarrow a' q' R}$

$\wedge$	$\wedge$	a'	a_{i_2}	$\dots$	a_{i_l}	$\wedge$	$\wedge$
			$\hat{q}'$				
7. Конфигурация машины Тьюринга — описание текущего состояния машины: положение считывающей головки, её состояния и состояния ячеек.
8. Конфигурация машины Тьюринга, в которой считывающая головка находится на крайней левой ячейке массива информации, называется **правильной** конфигурацией. Обычно требуется, чтобы машина Тьюринга начинала и заканчивала работу в правильной конфигурации.
9. Функция f называется **вычислимой по Тьюрингу**, если существует машина Тьюринга, работающая следующим образом: для любой совокупности чисел $x_1, \dots, x_n$, для которых функция определена, машина Тьюринга, начав работать из начальной конфигурации, закончит работу в конфигурации q_z . Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ не определена на данном интервале, то машина Тьюринга работает бесконечно.

5.1.1 Способы задания

1. Автоматная таблица

(a)

$A \backslash Q$	q_0	$\dots$	q_j	$\dots$	q_z
$\wedge$					
a_1					
$\dots$					
a_i			$a'q'h$		
$\dots$					
a_n					

2. Совокупность команд:

(a) $a_i q_j \rightarrow a' q' h$

5.1.2 Вычисление суперпозиций

1. $y = f(x)$, $z = g(y)$
2. $z = g(f(x))$ — суперпозиция (композиция)
3. Теорема: Если функции $f(x)$ и $g(y)$ вычислимы по Тьюрингу, то их суперпозиция также вычислима по Тьюрингу. Такую машину Тьюринга называют композицией машин Тьюринга.
4. $q_z^f = q_0^g$
5. Пусть: $P(x_1, \dots, x_n)$ — предикат.

(a) $\chi_P(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & P(x_1, \dots, x_n) = \text{"И"} \\ 0 & P(x_1, \dots, x_n) = \text{"Л"} \end{cases}$ — характеристическое уравнение

(b) Предикат вычислим по Тьюрингу, если характеристическое уравнение вычислимо по Тьюрингу.

6. Если функции $f_1(x_1, \dots, x_n)$, $f_2(x_1, \dots, x_n)$ и предикат $P(x_1, \dots, x_n)$ вычислимы по Тьюрингу, то и функция $f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) & P(x_1, \dots, x_n) = \text{"И"} \\ f_2(x_1, \dots, x_n) & P(x_1, \dots, x_n) = \text{"Л"} \end{cases}$ также вычислима по Тьюрингу

5.2 Гёделевская нумерация

1. Гёделевская нумерация — прием, позволяющий превратить любой алгоритм в числовой алгоритм, работающий с натуральными числами.

Часть XIV

Лекция 10 (17.11.15)

5.3 Частично-рекурсивные функции

1. Суперпозицией функций $h(x_1, \dots, x_n)$ и $g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, \dots, x_n)$ называется функция $f(x_1, \dots, x_n) = h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, \dots, x_n))$
2. $f(x_1, \dots, x_n, y)$, $g(x_1, \dots, x_n)$, $h(x_1, \dots, x_n, y, z)$
3. $\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f(x_1, \dots, x_n, y+1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)) \end{cases}$

5.3.1 Операция минимизации

1. $y = f(x_1, \dots, x_n)$
2. $\mu = \mu_0(f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n)$
3. $\mu(f, x_1, \dots, x_n)$
4. Пример:
 - (a) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, минимизация для x_2
 - i. $x_1 + y = x_2$
 - ii. $y = x_2 - x_1$
 - iii. $\mu(x_1 + y = x_2) = x_2 - x_1$
 - (b) $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$
 - i. $\mu(x_1 \cdot y = x_2) = \frac{x_2}{x_1}$
 - (c) $f(x_1) = x_1^k$
 - i. $\mu(y^k = x_1) = \sqrt[k]{x_1}$

5.3.2 Базисные функции

1. $O(x) = 0$
2. Функция следования: $S(x) = x + 1$
3. Функция выбора: $I_m^n(x_1, \dots, x_n) = x_m; 1 \leq m \leq n$
4. Функции называются **примитивно рекурсивными**, если они могут быть получены из элементарных применением конечного числа операций суперпозиции и примитивной рекурсии.
5. Функция называется **частично рекурсивной**, если она может быть получена из элементарных применением конечного числа операций суперпозиции, рекурсии и минимизации.
6. Если частично рекурсивная функция определена при всех значениях аргументов, то она называется **рекурсивной**.
7. Из определения и применения операции суперпозиции следует, что все константы примитивно рекурсивны.

$$(a) f(x, y) = x + y; g(x) = x = I_1^2(x, y); h(x, y, z) = S(z)$$

$$(b) \begin{cases} f(x, 0) = x + 0 = x \\ f(x, y + 1) = x + (y + 1) = x + y + 1 = f(x, y) + 1 \end{cases}$$

Часть XV

Семинар 7 (24.11.15)

1. $f(y) = y^2$
 - (a) $\begin{cases} f(0) = 0^2 = 0 = \Theta(x) \\ f(y + 1) = (y + 1)^2 = y^2 + 2y + 1 = z + 2y + 1 = h(x, y, z) \end{cases}$
 - (b) $f(x, y) = 2x + y + 1$
 - (c) $\begin{cases} f(x, 0) = 2x + 1 \\ f(x, y + 1) = 2x + y + 1 + 1 = S(z) = h(x, y, z) \end{cases}$
 - (d) $f(y) = 2y + 1$

$$(e) \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(y+1) = 2y+1+2 = z+2 \end{cases}$$

$$(f) f(y) = y+2$$

$$(g) \begin{cases} f(0) = 0+2 = 2 \\ f(y+1) = y+2+1 = S(x) \end{cases}$$

$$2. 1* \rightarrow *1$$

$$*1 \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow \cdot 1$$

$$(a) \underline{11*}111$$

$$(b) \underline{1*}1111$$

$$(c) *\underline{11}111$$

$$(d) \underline{1}1111$$

$$(e) \cdot 11111$$

$$3. A = \{*, 1, \vee, ?\}$$

$$1) *11 \rightarrow \vee * 1$$

$$2) *1 \rightarrow \vee$$

$$3) 1\vee \rightarrow \vee 1?$$

$$4) ?\vee \rightarrow \vee?$$

$$5) \vee 1 \rightarrow \vee$$

$$6) \vee? \rightarrow ?$$

$$7) ? \rightarrow 1$$

$$8) 1 \rightarrow \cdot 1$$

$$(a) f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

Часть XVI

Лекция 11 (24.11.15)

6 Нормальные алгоритмы Маркова

1. Алгоритмом называется точное предписание, определяющее вычислительный процесс, который ведет от варьируемых исходных данных к искомому результату.
2. Характеристические свойства алгоритмов:
 - (a) Дискретность: алгоритм состоит из отдельных шагов, которые обязательно завершаются
 - (b) Элементарность шагов: выполнение каждого шага должно быть простым
 - (c) Детерминированность: результат выполнения каждого шага алгоритма однозначен
 - (d) Направленность: должно быть указано, что надо считать результатом работы алгоритма
 - (e) Массовость: исходные данные для алгоритма могут подбираться из заранее фиксированного множества возможных исходных данных

Часть XVII

Лекция 12 (08.12.15)

Экзаменационные вопросы

1. Высказывание. Таблица истинности. (!)

- (а) Высказывание — утверждение, про которое всегда можно сказать, истинно оно или ложно.
2. Семантические таблицы Бета. Доказательство по Бету. Опровержение по Бету.
3. Аксиомы логики высказываний. Правила вывода. Теорема о подстановке эквивалентных формул.
4. Дизъюнкты, резольвента. Резолютивный вывод из множества дизъюнктов. (!)
 - (а) Дизъюнкт: $A \vee \bar{B} \vee \bar{C}$
 - (б) Резольвента (двух дизъюнктов $A \vee \bar{B} \vee \bar{C}$ и $\bar{A} \vee B \vee D$ по A): $\bar{B} \vee \bar{C} \vee B \vee D$
 - (с) $S = \{D_1, D_2, \dots, D_n\} \vdash F$: Дизъюнкт F выводится из множества S с помощью резолюции
5. Метод резолюции в логике высказываний. (!)
6. Предикаты. Кванторы. (!)
 - (а) Предикаты — высказывания или утверждения об элементах какого-либо множества.
 - i. “ x — четное число” = $Q(x)$
 - (б) Кванторы
 - i. Квантор всеобщности $\forall x Q(x)$ — для любого x , x — четное число
 - ii. Квантор существования $\exists x Q(x)$ — существует такой x , что x — четное число
7. Формулы исчисления предикатов. Основные равносильности, содержащие кванторы.
8. Подстановочное множество. Композиция подстановок.
9. Предваренная нормальная форма. Алгоритм приведения формулы или предложения к ПНФ. (!)
 - (а) $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \sigma$
 - (б) $Q_i = \begin{cases} \forall \\ \exists \end{cases}$
10. Сколемовская нормальная форма. Алгоритм построения СНФ.
 - (а) $\exists x_6 \forall x_1 \forall x_3 \exists x_4 \forall x_5 \exists x_2 \sigma$ — ПНФ
 - (б) $\{x_6/a, x_4/f(x_1, x_3), x_2/g(x_1, x_3, x_5)\}$
11. Метод семантических таблиц в логике предикатов.
12. Литерал. Дизъюнкт. Хордовский дизъюнкт. Метод резолюции в логике предикатов. (!)
13. Аксиомы в логике предикатов. Правило заключения и правило обобщения. Теорема дедукции.
14. Метод резолюции в логике предикатов.
15. Определение и способы задания машины Тьюринга. (!)
16. Вычисление на машинах Тьюринга. Функции, вычислимые по Тьюрингу.
17. Вычислимость суперпозиции и разветвления на машине Тьюринга.
18. Частичные функции. Операции примитивной рекурсии, суперпозиции и минимизации. (!)
19. Элементарные функции. Частично-рекурсивные функции.
20. Гёделевская нумерация.
21. Понятие алгоритма, его характеристические свойства. (!)
22. Вычислимость по Тьюрингу. Тезис Черча-Тьюринга.
23. Понятие алгоритма. Примеры неразрешимых по Тьюрингу проблем.
24. Нормальные алгоритмы Маркова. (!)