Часть I

Лекция 1 (4.09.15) “Числовые ряды и последовательности”

Информация о семестре

1. Темы:
   (a) Ряды
   (b) Теория функций комплексных переменных
2. Литература:
   (a) Воробъев Н.Н. - “Теория рядов”
   (b) “Вся высшая математика”
3. Плохая литература:
   (a) Глухов и Никольский
   (b) Кудрявцев
4. Две контрольных работы

1 Числовые ряды и последовательности

1.1 Основные понятия, связанные с последовательностями

1. Определение 1: **Последовательностью действительных чисел** называется функция f, определенная на множестве всех натуральных чисел $n \to f(n)$.
   (a) Число $x_n = f(n)$ называется $n-$ым членом последовательности.
2. Определение 2: Число a называется **пределом** последовательности $\{x_n\}_{n \in N}$ $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 : n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.
   (a) Примером последовательности являются **арифметическая** и **геометрическая**.
3. Определение 3: Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется **бесконечно малой** ($\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$), если любому $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 : n > N(\varepsilon) \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon$.
4. Определение 4: Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой** ($\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$), если $\forall E > 0 \exists N(E) > 0 : n > N(E) \Rightarrow |x_n| < E$.
5. Определение 5: Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если $\exists$ число M такое, что $x_n \leq M \, \forall n \in N$.
6. Определение 6: Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной снизу**, если $\exists$ число m такое, что $x_n \geq m \, \forall n \in N$.

7. Определение 7: Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если она ограничена сверху и снизу.
8. Определение 8: Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей** (неубывающей), если $x_n < x_{n+1}$ $(x_n \leq x_{n+1})$ $\forall n$.
   Последовательность $\{x_n\}$ называется **убывающей** (невозрастающей), если $x_n > x_{n+1}(x_n \geq x_{n+1})$ $\forall n$.
9. Определение 9: Возрастающие и убывающие последовательности называются **монотонными** последовательностями.
10. Определение 10: Если последовательность не имеет предела, то её называют **расходящейся**.
11. Теорема 1: **Теорема Вейерштрасса**: Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

1.1.1 Примеры

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+3n^2+1}{1-n-2n^3} = (\frac{\infty}{\infty}) = -\frac{5}{2}$
2. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = 0$

1.2 Числовые ряды. Сходимость

1. Рассмотрим числовую последовательность $\{u_n\}$.
2. Определение 11: **Числовым рядом** называется бесконечная сумма членов числовой последовательности $\{u_n\}$, т.е. $u_1+u_2+...+u_n+... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1.1). При этом u_n называют **общим членом** ряда.
3. Замечание 1: Последовательность $\{u_n\}$ может состоять из комплексных чисел, вещественных чисел и эти числа могут иметь разные знаки.
4. Примеры:
   (a) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$
   (b) $1 + 1 + 1 + 1 + ...; u_n = 1$
   (c) $1 - 1 + 1 - 1 + ... + (-1)^{n\pm 1} + ...$
5. Определение 12: **Частичными суммами** числового ряда (1.1) называются суммы $S_1 = u_1$ (первая частичная сумма), $S_2 = u_1 + u_2$, ..., $S_n = u_1 + ... + u_n$ (n-ная частичная сумма). $\{S_n\}$ - последовательность частичных сумм.
6. **Определение 13:** Числовой ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частичных сумм, т.е. $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$ (1.2).
7. Определение 14: Если $\lim_{n\to\infty} S_n = \left[\begin{matrix}\nexists \\ \infty\end{matrix}\right.$ (не существует, либо бесконечен), то ряд (1.1) называется **расходящимся**.
8. Исследуем ряды из примеров 1.2.4.{a,b,c}.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

i. $S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2}$
$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}$
...
$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ... + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$

ii. $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A=1}{n} + \frac{B=-1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

iii. $\lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1 \Rightarrow$ сходится

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + ...$

i. $S_1 = 1$
$S_2 = 2$
...
$S_n = n$

ii. $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty \Rightarrow$ расходится

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + ... + (-1)^{n-1}$

i. $S_1 = 1$
$S_2 = 0$
$S_3 = 1$
...
$S_n = \begin{cases} 1 & n = 2k-1 \\ 0 & n = 2k \end{cases} \Rightarrow \{S_n\} \nexists \lim_{n\to\infty} S_n \implies$ расходится

ii. Если подпоследовательности имеют разные пределы, то последовательность не имеет предела.

9. Замечание 2: С бесконечными суммами нельзя обращаться как с конечными.

   (a) **Нельзя:** Говорить, что S - сумма всех членов ряда, т.к. для "условно" сходящихся рядов сумма ряда зависит от порядка слагаемых.

10. Замечание 3: При определении суммы ряда вместо процесса бесконечного прибавления применяется **предельный переход**, т.е.:

   (a) Вычисляем S_n

   (b) Находим его предел $\lim_{n\to\infty} S_n$

1.3 Числовые ряды с комплексными членами

1. Пусть:

   (a) u_n - комплексное число, т.е. $u_n = a_n + ib_n$

2. Тогда:
   (a) Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n)$ частичная сумма $S_n = (a_1 + ... + a_n) + i(b_1 + ... + b_n)$
   (b) $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\sum_1^{\infty} a_n + i\sum_1^{\infty} b_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_1^n a_k + i\lim_{n\to\infty}\sum_1^n b_k = a + b_i \Leftrightarrow \exists \begin{matrix}\lim_{n\to\infty}\sum_1^n b_k = b \\ \lim_{n\to\infty}\sum_1^n a_k = a\end{matrix}$
   (c) Ряд с комплексными членами сходится тогда и только тогда, когда сходятся два действительных ряда: $\sum_1^{\infty} a_n$ и $\sum_1^{\infty} b_n$.

Часть II

Семинар 1 (3.09.15) “Ряды”

1. Две темы
2. Две контрольных работы
3. Типовой расчет

Ряды

1. $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n \in R$ - общий член ряда
2. Частичные суммы ряда:
   (a) $S_1 = a_1$
   (b) $S_2 = a_1 + a_2$
   (c) ...
   (d) $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$
3. Ряд называется **сходящимся**, если существует конечный предел частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, и **расходящимся** в противном случае.
   (a) Число S называется **суммой** ряда.
4. Необходимый признак сходимости ряда: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
5. Необходимый признак расходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$
6. $a_n = (-1)^n$; $(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + ... + (-1)^n + ...$

(a) $S_1 = -1$
$S_2 = 0$
$S_3 = -1$
$S_4 = 0$
...

(b) $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \Longrightarrow$ ряд расходится

7. Исследовать ряд на сходимость: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} =$

(a) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

(b) $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

(c) $= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$

(d) $S_1 = 1 - \frac{1}{2}$
$S_2 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$
$S_3 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4})$
$S_4 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5})$
...
$S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + ... + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - \dfrac{1}{n+1}) = 1 \Longrightarrow$ ряд сходится

Часть III

Опциональный семинар 1 (9.09.15)

Примеры

1. $\lim_{x\to 2} \frac{\sin 3\pi x}{\sin 7\pi x} = \begin{vmatrix} t = x - 2 \\ x = t + 2 \\ t \to 0 \end{vmatrix} = \lim_{t\to 2} \frac{\sin(3\pi t + 6\pi)}{\sin(7\pi t + 14\pi)} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin 3\pi t}{\sin 7\pi t} = \frac{3}{7}$

2. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

(a) $\frac{1}{3n-1} \cdot \frac{1}{3n+2} = \frac{A}{3n-1} + \frac{B}{3n+2}$

(b) $1 = A(3n+2) + B(3n-1)$

(c) $\frac{1}{3(3n-1)} - \frac{1}{3(3n+2)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2})$

(d) $S_n = \frac{1}{3}[(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{8}) + (\frac{1}{8} - \frac{1}{11}) + ... + (\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2})] = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2})$

(e) $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{6} - \frac{1}{3(3n+2)}) = \frac{1}{6}$ - ряд **сходится**, так как его сумма конечна

3. $S = ?$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$ - геометрическая прогрессия

   (a) $a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...$

   (b) $S = \frac{a}{1-q}$ для $q < 1$.

   (c) $S_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n})$

   (d) $S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

4. $S = ?$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+(-1)^n}{3^n}$

   (a) $S_n = (\frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + ... + \frac{2^n}{3^n}) + (-\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - ...) = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ - ряд **сходится**

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(\ln(n+1) - \ln n)$

   (a) $S_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + ... + (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1)$

   (b) $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$ - ряд **расходится**

6. **Необходимый признак сходимости**: Если ряд u_n сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{3n+1}$

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n+1} = 1 \neq 0$ - ряд **расходится** по необходимому признаку расходимости

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)^3} = 0$ - необходимый признак выполняется, продолжаем исследование

9. $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{arctg}\frac{4}{n}$

   (a) $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{arctg}\frac{4}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n}}{\frac{1}{n}} = 4$ - ряд **расходится** по необходимому признаку

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{3n+1}{10n+11}}$

    (a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3n+1}{10n+11}} = 0.3^0 = 1$ - ряд **расходится** по необходимому признаку

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$

(a) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2^n}{3^n}}{1+\frac{2^n}{3^n}}=1$ - ряд **расходится** по необходимому признаку

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$

    (a) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1})}=1\neq 0$ - ряд **расходится** по необходимому признаку

13. **Признак Даламбера:**

    (a) Дано:

      i. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$
      ii. $a_n\geq 0$

    (b) Если $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=d\begin{cases}<1 & \text{ряд сходится}\\ >1 & \text{ряд расходится}\\ =1 & \text{признак ответа не дает}\end{cases}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{4^{n+2}}$

    (a) Необходимый признак: $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^{n+2}\ln 4}=0$ - необходимый признак выполняется, продолжаем исследование

    (b) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{4^{n+3}}\cdot\frac{4^{n+2}}{n+1}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{4}<1$ - ряд **сходится** по признаку Даламбера

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n!}$ - **<u>пример для Даламбера</u>**

    (a) $\lim_{n\to\infty}\frac{6^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{6^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n+1}=0<1$ - ряд **сходится** по признаку Даламбера

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$

    (a) Необходимый признак: $\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3^n\ln 3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3^n\ln^2 3}=0$ - необходимый признак выполняется, продолжаем исследование

    (b) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)}{3n}=\frac{1}{3}<1$ - ряд **сходится** по признаку Даламбера

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$

    (a) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{10}=\infty$ - ряд **расходится** по признаку Даламбера

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}}{2^n}$

    (a) Необходимый признак: $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{100}}{2^n}=0$ - необходимый признак выполняется, продолжаем исследование

    (b) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^{100}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{100}(1+\frac{1}{n})^{100}}{2n^{100}}=\frac{1}{2}<1$ - ряд **сходится** по признаку Даламбера

Домашнее задание

1. Типовой расчет: 1,2,4(кроме 5 и 16)

Часть IV

Семинар 2 (10.09.15)

Числовые ряды с положительными членами

$$a_n \geq 0; \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \rightrightarrows \begin{matrix} \text{сходится} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \text{расходится} \Leftarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \end{matrix}$$

Гармонический ряд

1. $a_n = \frac{1}{n}; \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} + ...$
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ - необходимый признак сходимости выполняется, продолжаем исследование
2. $a_n = \frac{1}{n^2}$ - сходится, так как попадает в область сходимости под графиком $\frac{1}{n}$
   $b_n = \sqrt[3]{n}; \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} = \infty \Rightarrow$ расходится

Шпаргалка 4: Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Признак сравнения

1. Пусть:
   (a) $a_n \leq b_n$
   (b) $n \geq N$
2. Тогда:
   (a) Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ тоже расходится.
   (b) Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.

Предельный признак сравнения

1. Пусть:
   (a) $a_n \sim b_n$
2. Тогда:
   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (оба ряда эквивалентны в смысле сходимости)

Признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d \begin{cases} < 1 & \text{ряд сходится} \\ > 1 & \text{ряд расходится} \\ = 1 & \text{признак ответа не дает} \end{cases}$$

Радикальный признак Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = d \begin{cases} < 1 & \text{ряд сходится} \\ > 1 & \text{ряд расходится} \\ = 1 & \text{признак ответа не дает} \end{cases}$$

Интегральный признак Коши

1. Пусть:
   (a) $a_n = f(x)$
2. Тогда:
   (a) Если $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.
   (b) Если $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже расходится.

Примеры

1. $a_n = \frac{1}{n}$; $f(x) = \frac{1}{x}$
   $b_n = \frac{1}{n^2}$; $g(x) = \frac{1}{x^2}$
   (a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x|_1^{\infty} = \ln\infty - \ln 1 = \infty \Rightarrow$ **расходится**
   (b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}|_1^{\infty} = -1 \Rightarrow$ **сходится**

Эталонные ряды

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \begin{cases} |q| < 1 & - \text{сходится} \\ |q| \geq 1 & - \text{расходится} \end{cases}$

2. Ряд Дирихле: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \alpha > 1 & - \text{сходится} \\ a \leq 1 & - \text{расходится} \end{cases}$

Домашнее задание

Вариант 11

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^6+2}+2^n}$

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^6+2}+2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\frac{6n^5}{\sqrt{n^6+2}} + \ln 2 \cdot 2^n} = 0$ - необходимый признак выполняется, продолжаем исследование

   (b) $\frac{n}{\sqrt{n^6+2}+2^n} < \frac{n}{\sqrt{n^6+2}} < \frac{n}{\sqrt{n^6}} < \frac{1}{n^2}$

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ - сходится, следовательно ряд с меньшими членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^6+2}+2^n}$ также **сходится** по первому признаку сравнения.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1}{n}} \operatorname{arctg} \dfrac{n}{3^n}$

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} \operatorname{arctg} \dfrac{n}{3^n} = 1 \cdot 0 = 0$ - необходимый признак выполняется, продолжаем исследование

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{\frac{1}{n+1}} \operatorname{arctg} \frac{n+1}{3^{n+1}}}{2^{\frac{1}{n}} \operatorname{arctg} \frac{n}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{-\frac{1}{n(n+1)}} \dfrac{n+1}{n \cdot 3^n} = 1 \cdot \dfrac{1}{\infty} = 0 < 1$ - ряд **сходится** по признаку Даламбера

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\dfrac{n\sqrt{n}}{4n^2+3})^n$

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\dfrac{n\sqrt{n}}{4n^2+3})^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt{n}}{4n^2+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{4+\frac{3}{n^2}} = \dfrac{0}{4} = 0 < 1$ - **сходится** по радикальному признаку Коши

Вариант 12

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \cos^4 \frac{\pi}{n}$

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cos^4 \frac{\pi}{n} = \infty$ - **расходится** по необходимому признаку расходимости

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n}$

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(2n+2)!}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{(2n)!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}}{2} = \infty > 1$ - ряд **расходится** по признаку Даламбера

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{\ln(2^n+1)})^n$

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{n}{\ln(2^n+1)})^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(2^n+1)} =$
   $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(2^n)+\ln(1+2^{-n})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} > 1$ - ряд **расходится** по радикальному признаку Коши

Часть V

Лекция 2 (11.09.15)

1.4 Геометрическая прогрессия

1. Пусть:

   (a) $u_n = aq^{n-1}$

   (b) $a \neq 0$

2. Тогда:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...$ является формальной суммой геометрической прогрессии с первым членом a и знаменателем n.

   (b) $q \neq 1 \Longrightarrow S_n = a + aq + ... + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}$

   (c) $|q| < 1 \Longrightarrow q^n \to 0$ при $n \to \infty$

      i. $\lim_{n\to\infty} S_n = S = \frac{a}{1-q}$

   ii. $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \dfrac{a}{1-q}, |q| < 1$

(d) $|q| > 1 \Longrightarrow q^n \to \infty$

   i. $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \Rightarrow$ ряд **расходится**

(e) $q = 1$; $S_n = n \cdot a$; $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$- ряд **расходится**

(f) $q = -1$; $S_n = \begin{cases} a & n = 2k-1 \\ 0 & n = 2k \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} S_n \Rightarrow$ ряд **расходится**

1.5 Гармонический ряд

1. Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ (1.4) - **гармонический**, так как каждый его член, начиная со второго, является **гармоническим средним**.

2. **Среднее гармоническое** чисел a и b определяется как $\dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

   (a) Пусть:

      i. $a = \frac{1}{n-1}$

      ii. $b = \frac{1}{n+1}$

   (b) Тогда: $\frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{n-1}} + \frac{1}{\frac{1}{n+1}}} = \frac{2}{n-1+n+1} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$

3. Докажем, что ряд $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится:

   (a) $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ - возрастающая последовательность

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{1}{n})^n = e \Rightarrow e > (1 + \frac{1}{n})^n = (\frac{n+1}{n})^n$

   (c) Логарифмируем: $\ln e > n[\ln(n+1) - \ln n]$

   (d) $\frac{1}{k} > \ln(k+1) - \ln k$

   (e) Подставляем k:

      i. $1 > \ln 2 - \ln 1$

      ii. $+$

      iii. $\frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2$

      iv. $+$

      v. $\frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3$

      vi. $+ ... +$

      vii. $\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$

(f) $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} > (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + ... + (\ln(n+1) - \ln n) + ...$

(g) $S_n > \ln(n+1)$

(h) $\lim_{n\to\infty} S_n > \lim_{n\to\infty} \ln(n+1)$

(i) $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \Rightarrow$ ряд **расходится**

2 Свойства сходящихся рядов

2.1 Остаток сходящегося ряда

1. Определение 1: Разность $S - S_n$ называется **остатком** ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + ...$ - сходящийся ряд
   (b) $S = u_1 + u_2 + ... + u_n + u_{n+1} + ...$ - формальная сумма
   (c) $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$
   (d) Остаток ряда обозначается $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + ...$ (2.1)
   (e) $S = S_n + r_n$ (2.2)
   (f) $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$
   (g) **Вывод**: Остаток сходящегося ряда стремится к нулю $r_n \to 0$. Это свойство используется для приближенного вычисления суммы ряда.
2. Пример: $1 + \frac{1}{2\cdot5} + \frac{1}{3\cdot5^2} + ... + \frac{1}{n\cdot5^{n-1}}$. Оценить погрешность при замене суммы ряда S частичной суммой S_3.
   (a) $S_3 = 1 + \frac{1}{2\cdot5} + \frac{1}{3\cdot5^2} = 1\frac{17}{150}$
   (b) $r_3 = \frac{1}{4\cdot5^3} + \frac{1}{5\cdot5^4} + ...$
   (c) $r_3 < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + ... = \frac{1}{5^3}(1 + \frac{1}{5} + ...)$ - геометрическая прогрессия
      i. $a = \frac{1}{5^3}$
      ii. $q = \frac{1}{5}$
   (d) $S = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{5^3}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{5^3\cdot4} = 0,01 \Longrightarrow r_3 < 0,01$
   (e) $S = 1\frac{17}{150} \pm 0,01$
3. Теорема 1 (Необходимый признак сходимости ряда): Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$
   (a) Доказательство:
      i. $u_n = S_n - S_{n-1}$
      ii. Из сходимости ряда следует, что $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$ тогда $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$

(b) Замечание 1: **Обратное неверно**. Из того, что $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ не следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

(c) Пример 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

i. $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

(d) Необходимым признаком удобно пользоваться для доказательства расходимости ряда

(e) Пример 2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

i. $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$ - ряд **расходится** по необходимому признаку

2.2 Свойства сходящихся рядов

1. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(c_1u_n + c_2v_n)$ также сходится, причем, если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sigma$, а $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = S$, то $\sum_{n=1}^{\infty}(c_1u_n + c_2v_n) = c_1\sigma + c_2S$.

   (a) Обратное утверждение неверно, например: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}$ - сходящийся ряд, однако $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ расходятся.

2. Если дан сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то можно в нем расставлять скобки, т.е. группировать члены ряда сохраняя их прежний порядок.

   (a) $(u_1 + ... + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + ... + u_{n_2}) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} v_k$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} v_k$ - сходится и его сумма равна S, т.е. сумме исходного ряда.

3. Сходимость ряда не нарушится, если отбросить или прибавить конечное число членов, при этом сумма ряда изменится на сумму этих отброшенных или добавленных членов.

   (a) Из этого следует, что если какое-либо свойство ряда начинает выполняться начиная с некоторого номера, то вопрос о сходимости или расходимости можно считать выполенным для всех членов ряда, так как конечное число членов ряда можно отбросить.

3 Числовые ряды с положительными членами

3.1 Критерий сходимости

Теорема 1 (критерий сходимости): Для того, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$ была ограничена.

3.2 Признаки сходимости положительных рядов

1. Теорема 2 (I признак сравнения):

   (a) Пусть:

   i. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ (3.1)

ii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n \geq 0$ (3.2)

iii. $\forall n\, b_n \geq a_n$

(b) Тогда:

i. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

ii. Из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

(c) Доказательство:

i. Пусть:

A. $S_n = a_1 + ... + a_n$
$\sigma_n = b_1 + ... + b_n$

ii. Тогда:

A. Из условия, что $b_n \geq a_n$ следует, что $0 \leq S_n \leq \sigma_n$

B. Из сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует, что $\exists \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$; $\sigma_n \leq \sigma$

C. $\Longrightarrow S_n \leq \sigma_n \leq \sigma$

D. Последовательность частичных сумм $\{S_n\} \uparrow$ и ограничена $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **сходится** (критерий сходимости)

(d) Доказательство от противного:

i. Пусть:

A. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится

B. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится

ii. Тогда:

A. Из пункта 1 следует, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **сходится**, следовательно пришли к противоречию и, следовательно, наше утверждение верно и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

(e) Пример 1: Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

i. Сравним с $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

ii. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (гармонический ряд) расходится $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ тоже расходится. (по I признаку сравнения)

(f) Пример 2: Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

i. Сравним со сходящимся рядом

ii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ - сходится

A. $n \geq 2$: $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$

iii. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ сходится, $\Rightarrow$ меньший ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ тоже сходится. (по I признаку сравнения)

2. Теорема 3 (II признак сравнения “предельный”):

(a) Пусть:

i. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \geq 0$

ii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n,\ b_n \geq 0$

iii. $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ (3.5), причем $0 < k < \infty$

(b) Тогда:

i. Оба ряда сходятся <u>или</u> расходятся одновременно.

(c) Следствие 1: Если $k = 0$, то из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(d) Примеры:

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$

A. $\sin\frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n},\ n \to \infty$

B. Сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится

C. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi/n}{1/n} = \pi < \infty$ - **расходится** по второму признаку сравнения

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^5+1}}$

A. Сравним с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который сходится (ряд Дирихле)

B. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{n}{n^5+1}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n^5}}}}{\frac{1}{n^2}} = 1 < \infty$ - **сходится** по второму признаку сравнения

Часть VI

Опциональный семинар 2 (16.09.15)

Радикальный признак Коши

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k \begin{cases} < 1 & \text{сходится} \\ > 1 & \text{расходится} \\ = 1 & \text{не дает сведений} \end{cases}$

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ - замечательный предел
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln n} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = e^0 = 1$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$
   (a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$ - сходится по радикальному признаку Коши
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}(\frac{n}{n+1})^{n^2}$
   (a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}(\frac{n}{n+1})^{n^2}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{3e} < 1$ - сходится по радикальному признаку Коши
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{2n}$
   (a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin^n \frac{\pi}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{\pi}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} = 0 < 1$ - сходится по радикальному признаку Коши

Интегральный признак Коши

1. Пусть:
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; $\int_1^{\infty} f(x)dx$
   (b) $f(n) = a_n$
   (c) $f(x) > 0$; $x \in [1, \infty]$
   (d) $f(x) \downarrow$
2. Тогда:
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\int_1^{\infty} f(x)dx$ оба сходятся или оба расходятся.
3. Примеры:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - ряд Дирихле с показателем 2

i. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to a}-\frac{1}{x}|_1^b=1$ - сходится, следовательно $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ тоже сходится

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ - ряд **Дирихле**

i. $\alpha>1$ - ряд сходится

ii. $\alpha\leq 1$ - ряд расходится

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3+n^2}$

i. $\int_1^{\infty}\frac{2dx}{3+x^2}=2\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}|_1^6=\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})$ - сходится, следовательно ряд тоже сходится

(d) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$

i. $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\int_2^{\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=\lim_{b\to\infty}-\frac{1}{\ln x}|_2^b=\frac{1}{\ln 2}$ - сходится, следовательно ряд сходится по интегральному признаку

Признаки сравнения

1. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$; $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$; $a_n\leq b_n$; $a_n,b_n\geq 0$

   (a) Если сходится $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, то тогда сходится и $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

   (b) Если расходится $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, то тогда расходится и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$; $0<k<\infty$

   (a) Оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

3. Ряды сравнения:

   (a) Ряд Дирихле

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ - сходится

   (c) $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$; $0<x\leq\frac{\pi}{2}$
   $\operatorname{tg}x>x$; $0<x<\frac{\pi}{2}$

   (d) $(\ln n)^P<n$; $P>0$ начиная с некоторого номера n

4. Примеры:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin na|}{n^2}$

   i. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - сходится

   ii. $\frac{|\sin na|}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin na|}{n^2}$ сходится по первому признаку сравнения

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}$

i. Способ 1: Оценка
  A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ - сходится
  B. $\frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}$ сходится по первому признаку сравнения

ii. Способ 2:
  A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ - сходится
  B. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}} : \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = 1$ - константа, следовательно ряд сходится по второму признаку сравнения

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$
  i. $\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}} < \frac{1}{2n \cdot 2^{2n+1}} < \frac{1}{2^{2n+2}}$
  ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+2}}$, $q = \frac{1}{4}$ - убывающая прогрессия $\Rightarrow$ ряд сходится по первому признаку сравнения

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$
  i. Сравним с $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n$ - сходится как прогрессия $q = \frac{2}{3}$
  ii. $\lim_{n\to\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n} \frac{3^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \pi = \pi$ - ряд сходится по второму признаку сравнения

Домашнее задание

1. Типовой расчет: 5, 4.1, 3
2. Фиолетовый задачник: 12.19-25,26,40,41,42,44,45,31,32,34,35,36,49,50,51,52
3. Сделать схему признаков сравнения

Часть VII

Семинар 3 (17.09.15)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4+1} - n^2)$
   (a) $a_n = (\sqrt{n^4+1} - n^2)$
   (b) $\lim_{n\to\infty} (\frac{(\sqrt{n^4+1}-n^2)(\sqrt{n^4+1}+n^2)}{\sqrt{n^4+1}+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}+n^2} = 0$ - необходимый признак сходимости выполняется, продолжаем исследование
   (c) $a_n = n^2(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}} - 1)$
      i. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}$; $\alpha(x) \to 0$
      ii. $a_n = n^2 \cdot \frac{1}{2n^4} = \frac{1}{2n^2}$

(d) В качестве эталонного ряда применяем $b_n = \frac{1}{n^2}$ - ряд Дирихле $\alpha = 2 > 1 \Rightarrow$ эталонный ряд сходится $\Rightarrow$ ряд a_n сходится по предельному признаку.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(3n-1)}{n!}$

(a) $a_n = \frac{2^n(3n-1)}{n!}$
$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}(3n+2)}{(n+1)!}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(3n+2)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n(3n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(3n+2)}{(n+1)(3n-1)} = 0 < 1$ - ряд сходится по признаку Даламбера

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n^2}{3n^2+\ln n})^n$

(a) $a_n = (\frac{n^2}{3n^2+\ln n})^n$

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{n^2}{3n^2+\ln n})^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2+\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+\frac{\ln n}{n^2}} = \frac{1}{3} < 1$ - сходится по радикальному признаку Коши

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^3} \cos^2 \frac{\pi}{n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!4^n}$

(a) $a_n = \frac{(2n-1)!!}{n!4^n}$
$a_{n+1} = \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!4^{n+1}}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!4^{n+1}} \cdot \frac{n!4^n}{(2n-1)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)}{4(n+1)} = \frac{1}{2} < 1$ - сходится по признаку Даламбера

6. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n \ln^2 n}$

Часть VIII

Лекция 3 (18.09.15)

1. Теорема 4 (признак Даламбера)

(a) Пусть:

i. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ таков, что $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$ (3.6)

(b) Тогда:

i. Если $d < 1$, ряд сходится

ii. Если $d > 1$, ряд расходится

iii. Если $d = 1$, признак ответа не дает

(c) Доказательство:

i. Пусть:

A. $d < 1$

B. $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$

ii. Тогда:

A. $\forall \varepsilon \geq 0 \exists N = N(\varepsilon) : n > N(\varepsilon) \Rightarrow |\frac{a_{n+1}}{a_n} - d| < \varepsilon$

B. $d - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < d + \varepsilon$ (3.7)

C. $\frac{a_{n+1}}{a_n} < d + \varepsilon$ $(d < 1)$

D. Выберем ε таким образом, чтобы $d + \varepsilon < 1$

E. Обозначим $d + \varepsilon = q$

F. Из (3.7) получаем следующую серию неравенств:

G. $a_{N+1} < a_N q$
$a_{N+2} < a_{N+1} q^2$
... (k раз)
$a_{N+K} < ... < a_n q^k$

H. $a_N + a_{N+1} + ... + a_{N+K} + ... < a_N(1 + q + ... + q^K + ...) = \frac{a_N}{1-q}$ - конечное число

I. По первому признаку сравнения, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

J. Конечное число слагаемых (первые N членов) на сходимость не влияют

iii. Пусть:

A. $d > 1$

iv. Тогда:

A. Выберем ε так, чтобы $d - \varepsilon > 1$

B. $a_{n+1} > a_n(d - \varepsilon) > a_n$

C. Т.е. члены ряда возрастают и $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, следовательно ряд расходится

(d) Примеры:

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

A. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e > 1$ - ряд расходится по признаку Даламбера

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

A. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} < 1$ - ряд сходится по признаку Даламбера

2. Теорема 5 (радикальный признак Коши)

(a) Пусть:

i. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ таков, что $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$ (3.8)

(b) Тогда:

i. Если $k < 1$, ряд сходится
ii. Если $k > 1$, ряд расходится
iii. Если $k = 1$, признак ответа не дает

(c) Доказательство: аналогично доказательству признака Даламбера

(d) Примеры:

i. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{3n})^n$

A. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{n+1}{3n})^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1$ - ряд **сходится** по радикальному признаку Коши

ii. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$

A. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \frac{e}{2} > 1$ - ряд **расходится** по радикальному признаку Коши

3. Теорема 6 (интегральный признак Коши)

(a) Пусть:

i. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ таков, что можно подобрать функцию $f(x)$, которая

A. Определена при $x \in [1; +\infty)$
B. Положительна при $x \in [1; +\infty)$
C. Непрерывна при $x \in [1; +\infty)$
D. Невозрастающая при $x \in [1; +\infty)$
E. $f(n) = a_n$

(b) Тогда:

i. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

(c) Примеры:

i. Рассмотрим интеграл Дирихле:

A. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}|_1^b$
B. Если $\alpha > 1$, интеграл сходится
C. Если $\alpha < 1$, интеграл расходится
D. Если $\alpha = 1$, интеграл расходится
E. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ называется **рядом Дирихле**

ii. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n} \to \int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \int_2^{\infty}\frac{d\ln x}{\ln x} = \lim_{b\to\infty}\ln(\ln x)|_2^b = \infty - \ln(\ln 2)$ - интеграл расходится, следовательно ряд расходится по интегральному признаку

iii. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5+n^2} \to \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+5} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}|_1^b = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}})$ - интеграл сходится, следовательно ряд сходится по интегральному признаку

4. Замечание (о быстроте сходимости ряда): На практике важно находить приближенное значение суммы ряда при помощи частичных сумм. Ряд, частичные суммы которого при малых n хорошо приближают сумму, называется **быстросходящимся**. В противном случае - **медленносходящимся**.

(a) Хорошо сходящимися считаются ряды, если остаток ряда $r_n \to 0$ подобно членам геометрической прогрессии. Т.е. достаточно, чтобы $|S - S_n| \equiv |r_n| \leq aq^n$, $a > 0$, $0 < q < 1$

4 Знакопеременные ряды

4.1 Признак Лейбница для знакочередующихся рядов

1. Определение 1: **Знакочередующимся рядом** называется один из рядов:
   (a) $u_1 - u_2 + u_3 + ... + (-1)^{n-1}u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$
   (b) $-u_1 + u_2 - u_3 + ... + (-1)^{n}u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$
3. Изучать будем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$
4. Теорема 1 (признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов):
   (a) Пусть:
      i. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ таков, что:
         A. $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq ... \geq u_n \geq ...$
         B. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
   (b) Тогда:
      i. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ сходится
   (c) Доказательство:
      i. Рассмотрим четные частичные суммы:
         A. $S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + ... + (u_{2m-1} - u_{2m}) \geq 0$
         B. $S_{2m} \leq S_{2m+2}$, следовательно $\{S_{2m}\} \uparrow$
         C. $S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - ... - u_{2m} \leq u_1$
         D. По теореме Вейерштрасса последовательность $\{S_{2m}\}$ возрастает и ограничена, следовательно у нее существет предел $\lim_{n\to\infty} S_{2m} = S \leq u_1$
      ii. Для нечетных сумм справедливо следующее равенство:
         A. $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$
         B. $\lim_{n\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2m} + \lim_{n\to\infty} u_{2m+1} = S \Rightarrow$ существет предел последовательности частичных сумм $\Rightarrow$ ряд Лейбница сходится
      iii. $0 \leq S \leq u_1$

Часть IX

Лекция 4 (25.09.15) [Пропущено]

1. $u_1 - u_2 + ... + (-1)^{n-1}u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \Rightarrow 0 \leq S \leq u_1$ (4.1)

   $-u_1 + u_2 - ... + (-1)^n u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ (4.2)

   $u_n > 0$

2. Замечание 1: Если рассматривать (4.2), то $0 \geq S \geq -u_1 \Rightarrow \begin{cases} |S| \leq |u_1| \\ sign\, S = sign\, u_1 \end{cases}$

3. Замечание 2: Остаток ряда Лейбница также является рядом Лейбница, поэтому оценка остатка $|r_n| \leq |u_{n+1}|$ (4.3), т.е. $\begin{cases} |r_n| \leq |u_{n+1}| \\ sign\, r_n = sign\, u_{n+1} \end{cases}$

4. Пример 1: $\frac{1}{e} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}$

   (a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$

   (b) $x = 1$

   (c) $\frac{1}{e} \approx 0,374$

   (d) Точность вычислений: $|r_5| \leq \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$

   (e) $sign\, r_5 = sign(-\frac{1}{5!}) < 0$

4.2 Свойства знакопеременных рядов. Абсолютная сходимость.

1. Пусть: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ - произвольный знакочередующийся ряд, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ (4.4)

2. Теорема 2 (**теорема Коши**): Если ряд из модулей (4.4) произвольного знакопеременного ряда сходится, то сходится и сам ряд.

3. Определение 2: Если ряд, состоящий из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, то этот знакопеременный ряд называется **абсолютно сходящимся**.

4. Пример 2: Исследовать ряд на абсолютную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$

(b) Признак Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}| = \lim\limits_{n\to\infty}|\dfrac{(n+1)^3}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{2^n}{n^3}| = \dfrac{1}{2} < 1$ - ряд модулей сходится, следовательно исходный ряд **сходится абсолютно** $\Rightarrow$ не надо проверять признак Лейбница.

5. Определение 3: Если ряд, состоящий из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, то ряд называется **условно сходящимся**.

6. Пример 3: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$

   (a) Составим ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ - гармонический расходящийся ряд $\Rightarrow$ абсолютной сходимости нет.

   (b) Проверим признак Лейбница:

      i. $\lim_{n\to\infty}|u_n| = 0$; $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$
      ii. $|u_1| > |u_2| > ...$; $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > ...$
      iii. Признак Лейбница выполняется $\Rightarrow$ исходный ряд **сходится условно**.

4.3 Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

1. Теорема 3 (**теорема Дирихле**): Если знакопеременный ряд **сходится абсолютно**, то ряд, полученный произвольной перестановкой членов данного ряда, **абсолютно сходится** и имеет ту же сумму. (было в рядах с положительными членами)

2. Замечание 3: Если ряд **сходится условно**, то ряды, составленные из его знакочередующихся членов **расходятся**.

3. Теорема 4 (теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда): Если ряд **сходится условно**, то надлежащей перестановкой членов ряда можно сделать сумму ряда равной любому наперед заданному числу (даже ∞).

4.4 Признаки сходимости для абсолютно сходящихся рядов

1. Теорема 5

   (a) Пусть:

      i. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ таков, что $\exists\lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}| = d$

   (b) Тогда:

      i. При $d < 1$ ряд **абсолютно сходится**
      ii. При $d < 1$ ряд **расходится**
      iii. При $d = 1$ абсолютной сходимости нет

2. Теорема 6

(a) Пусть:

i. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ таков, что $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{|u_n|}} = k$

(b) Тогда:

i. При $d < 1$ ряд **абсолютно сходится**

ii. При $d < 1$ ряд **расходится**

iii. При $d = 1$ абсолютной сходимости нет

5 Функциональные ряды

5.1 Определение функционального ряда и области его сходимости

1. Определление 1:

   (a) Пусть:

   i. $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$ - последовательность функций, определенных на некотором множестве E.

   (b) Тогда:

   i. Формальная бесконечная сумма вида $u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (5.1) называется **функциональным рядом**, определенным на множестве E.

2. Пример 1: $1 + x + x^2 ... + x^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ (5.2)

3. Пусть $x_0 \in E \Rightarrow u_1(x_0) + u_2(x_0) + ... + u_n(x_0) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ (5.3) - обычный числовой ряд, для которого определено понятие сходимости

4. Определение 2: Ряд (5.1) называется **сходящимся** в точке $x_0 \in E$, если сходится числовой ряд (5.3).

5. Пример 2: В примере 1 $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ - бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

   (a) $q = \frac{1}{2}$; $S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ - ряд сходится

   (b) Возьмем $x_0 = 2$: $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}$

   (c) $q = 2 \Rightarrow$ ряд **расходится**

6. Определение 3: **Областью сходимости** функционального ряда (5.1) называется совокупность значений x из множества E такая, что в ней ряд (5.1) **сходится**.

   (a) В области сходимости можно говорить о сумме функционального ряда $S(x) = u_1(x) + ... + u_n(x) + ...$

7. Введем понятие частной суммы $S_n(x) = u_1(x) + ... + u_n(x)$ и понятие остаточного члена $r_n(x) = u_{n+1}(x) + ...$

8. Пример 3: $\sum_{n=1}^{\infty} ax^{n-1} = a + ax + ax^2 + ... + ax^{n-1} + ...$; $a \neq 0$

   (a) $|x| < 1$ - область сходимости ряда в этом интервале $S(x) = \frac{a}{1-x}$

9. Пример 4: $\frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + ... + \frac{1}{n^x} + ...$

   (a) Область сходимости $x > 1$

10. Пример 5: $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2^2+x^2} + ... + \frac{1}{n^2+x^2} + ...$

    (a) $\frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}$ - ряд **сходится** для $\forall x$, так как $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (ряд Дирихле)

11. Пример 6: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n n!$

    (a) $\lim_{n\to\infty} |\frac{x^{n+1}\cdot(n+1)!}{x^n n!}| = |x|$
    (b) $\lim_{n\to\infty}(n+1) < 1$
    (c) Выполняется только $x = 0$

12. Пример 7: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+\sin x}$ $(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n})$

    (a) Расходится при $\forall x$

13. Вывод: Для нахождения области сходимости функционального ряда можно использовать те же признаки сходимости, которые были доказаны и использованы для числовых рядов, то есть признаком Даламбера и радикальным признаком Коши. При этом члены функционального ряда необходимо брать по **модулю**, так как признаки применимы к рядам с положительными членами, то есть в области сходимости ряд будет **сходиться абсолютно**.

Часть X

Лекция 5 (02.10.15) [Пропущено]

5.2 Равномерная сходимость

1. Пример 8: $S(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + ... + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + ...$

   (a) $q(x) = \frac{1}{1+x^2}$
   (b) $S(x) = \frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \frac{x^2(1+x^2)}{x^2} = 1 + x^2$
   (c) $S(x) = \begin{cases} 1+x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

2. Определение 4: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** на множестве E, если

   (a) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на множестве E к $S(x)$ ($S(x)$ - сумма ряда)
   (b) Для $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ не зависящий от x такой, что остаток $|r_n(x)| < \varepsilon$, $\forall n > N$; $\forall x \in E$

3. $S(x) - S_n(x) = r_n(x)$

5.3 Мажоранта. Признак равномерной сходимости Вейерштрасса

1. Определение 5: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; $a_n \geq 0$ (5.5) называется **мажорантой** для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве E, если $\forall x \in E, \forall n = 1, 2, 3, ...$; $u_n(x) \leq a_n$ (5.6)

2. Теорема 1 (теорема Вейерштрасса): Если для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве E существует сходящаяся мажоранта, то этот ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **сходится абсолютно и равномерно** на множестве E.

3. Пример 1: Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$

   (a) $|\frac{\cos(nx)}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится как ряд Дирихле с $\alpha = 2$.
   (c) Вывод: по теореме Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ **сходится равномерно и абсолютно** на всей числовой оси.

4. Пример 2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n\sqrt{n^4+x^2}}$; $x \in [-2; 2]$

   (a) $|\frac{x^n}{2^n\sqrt{n^4+x^2}}| \leq \frac{2^n}{2^n\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^2}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - мажоранта, сходящаяся как ряд Дирихле с $\alpha = 2 \Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса исходный ряд **сходится равномерно** на $x \in [-2; 2]$

6 Степенные ряды

6.1 Теорема Абеля. Радиус сходимости

1. Определение 1: **Степенным рядом** называется ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ (6.1), где a_n, z_0 - заданные комплексные числа, а z - комплексная переменная.

2. Числа a_n называются **коэффициентами степенного ряда**, а z_0 - **центр ряда**.

3. Будем рассматривать вещественные степенные ряды: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ (6.2), где a_n, x_0 - заданные вещественные числа, x - вещественная переменная.

4. Если центр ряда - 0 ($x_0 = 0$; $z_0 = 0$) - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ или $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (6.3)

5. Переход от (6.1),(6.2) к (6.3) осуществляется с помощью замены $\varphi = z - z_0$; $t = x - x_0$, для простоты будем рассматривать (6.3).

6. Область сходимости любого степенного ряда **не пуста**, так как они сходятся при $x = 0$ ($z = 0$)

7. Теорема 1 (**теорема Абеля**): Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^n$ **сходится** в точке $x_0 \neq 0$, то он **абсолютно сходится** в $\forall x : |x| < |x_0|$.
8. Определение 2: Если существует такое неотрицательное число R (или $+\infty$) такое, что $\forall x : |x| < R$ степенной ряд (6.3) сходится, а при $\forall x : |x| > R$ степенной ряд (6.3) расходится, то это число называется **радиусом сходимости** степенного ряда, а область или интервал $(-R; R)$ **- интервалом сходимости** ряда.
9. Замечание: Для нахождения радиуса сходимости R используется достаточный признак абсолютной сходимости рядов.
10. Замечание: Если рассматривать ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)$, то интервал сходимости находится из неравенства $|x - x_0| < R$; $x_0 - R < x < x_0 + R$.
11. Пример 1: Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n$
    (a) Замечание: Если $x = \pm R$, то исследование проводится особо.
    (b) Воспользуемся признаком Даламбера
    (c) $\lim_{n\to\infty} |\frac{(n+2)x^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(n+1)x^n}| = \frac{|x|}{2} < 1$; $|x| < 2 \Rightarrow R = 2$
    (d) Область сходимости: (-2;2)
    (e) $x = 2$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)$ - расходится по необходимому признаку $\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty \neq 0$
    (f) $x = -2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(-1)^n 2^n}{2^n \cdot 1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)$ - расходится по необходимому признаку
    (g) **Ответ:** $R = 2$; область сходимости: $(-2; 2)$
12. Пример 2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} (-1)^{n+1}$
    (a) Шаг 1: По признаку Даламбера: $\lim_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n}| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x| < 1$
    (b) Радиус сходимости: $R = 1$; Область сходимости: $(-1, 1)$
    (c) Шаг 2: $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ — ряд Лейбница
        i. $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^{n+1}}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — гармонический ряд $\Rightarrow$ расходится
        ii. Признак Лейбница:
            A. $\lim_{n\to\infty} |\frac{(-1)^{n+1}}{n}| = 0$
            B. $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$
        iii. $\Rightarrow$ Условно сходится
    (d) Шаг 3: $x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — гармонический ряд $\Rightarrow$ расходится
        i. $(-1)^{2n+1} = -1$
    (e) **Ответ:** $R_{\text{сх}} = 1$; Область сходимости: $(-1; 1]$
13. Пример 3: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}$
    (a) По признаку Даламбера: $\lim_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{x^{2n+2}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{x^{2n}}| = |x^2| < 1$

(b) $R_{\text{сх}} = 1$; Область сходимости: $(-1; 1)$

(c) $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — ряд Дирихле с $\alpha = 2 \Rightarrow$ сходится

(d) $x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — ряд Дирихле с $\alpha = 2 \Rightarrow$ сходится

(e) Ответ: $R_{\text{сх}} = 1$; Область сходимости: $[-1; 1]$

14. Пример 4: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(a) По признаку Даламбера: $\lim_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}| = |x| \lim_{n\to\infty} |\frac{1}{n+1}| = 0 < 1$

(b) **Ответ:** $R_{\text{сх}} = +\infty$; Интервал сходимости: $(-\infty; +\infty)$

15. Пример 5: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n n!$

(a) По признаку Даламбера: $\lim_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{x^{n+1}(n+1)!}{x^n n!}| = |x| \lim_{n\to\infty} (n+1) < 1$

(b) **Ответ:** $R_{\text{сх}} = 0$; Область сходимости: $x = 0$

Часть XI

Семинары 4,5 (24.09,1.10.15) [Пропущено]

Часть XII

Семинар 6 (8.10.15)

1. Ряд Тейлора: $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ... = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$; $|x - a| < R$

(a) Функция $f(x)$ должна быть бесконечно дифференцируема в окрестности точки x_0

(b) Остаточный член $R_n \to 0$, $n \to \infty$

2. $f(x) = a_0 + a_1(x - a)^1 + a_2(x - a)^2 + ... + a_n(x - a)^n + ... = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$

(a) $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Часть XIII

Лекция 6 (9.10.15)

6.2 Равномерная сходимость степенного ряда

1. Теорема 2: Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ с $R_{\text{сх}} \neq 0$ **сходится абсолютно и равномерно** на любом отрезке $[a, b]$, лежащем строго внутри интервала сходимости.

   (a) Доказательство:

      i. Выбираем $x_0 = \max\{|a|, |b|\} \implies \forall x \in [a, b] : |x| \leq |x_0| \implies |a_n x^n| \leq |a_n x_0^n|$, то есть для $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ существует числовая мажоранта $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$, которая сходится, так как $x_0 \in (-R; R)$.

      ii. Тогда, по теореме Вейерштрасса, исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[a, b]$.

2. Свойства равномерно сходящихся степенных рядов:

   (a) Теорема 3: Степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ строго внутри интервала сходимости сходится к непрерывной функции $S(x)$.

   (b) Теорема 4 (интегрирования и дифференцирования степенных рядов): Степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ строго внутри интервала сходимости можно почленно интегрировать и дифференцировать, при этом радиус сходимости не меняется. Если интегрирование производится на отрезке $(0, x)$, то производная $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ (6.4) и интеграл $\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (6.5)

      i. Замечание: Сумма степенного ряда есть бесконечное число раз дифференцируемая функция (так как при дифференцировании степенного ряда получается степенной ряд). Этой свойство суммы называется **бесконечной гладкостью**.

      ii. Пример 6: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ — сходится равномерно и абсолютно для $|x| < 1$

         A. $q = -x^2$

         B. $S(x) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1+x^2}$

         C. Ряд можно почленно интегрировать: $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x 1 \cdot dx + \int_0^x (-x^2)dx + \int_0^x x^4 dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$

         D. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...; |x| < 1$

      iii. Пример 7: Найти сумму ряда $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + ...$

         A. $|x| < 1$ — ряд сходится равномерно (из примера 2)

         B. $S(x)$ — сумма ряда

         C. Продифференцируем ряд почленно: $S'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + ...$

         D. $q = -x$; $S'(x) = \frac{1}{1+x}$

         E. Проинтегрируем $S'(x)$: $S(x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$

         F. $x = 1$: $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

Часть XIV

Опциональный семинар 3 (9.10.15)

Пятиминутка

1. 1
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln(\frac{n+1}{n})$
   (a) $\lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = 0$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \ln \frac{n+1}{n}|$ сравним с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится
   (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = [\frac{0}{0}] = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/n} = 1$ — ряд расходится по второму признаку сравнения $\Rightarrow$ нет абсолютной сходимости
   (d) ...
3. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n+3^n}$
   (a) Способ 1:
      i. $\lim_{n\to\infty} |\frac{(-1)^n \cdot n}{n+3^n}| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+3^n \ln 3} = \frac{1}{\infty} = 0$
      ii. $\sum_{n=0}^{\infty} |(-1)^n u_n| = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$
      iii. $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+3^n)}{(n+1+3\cdot 3^n)n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})(\frac{n}{3^n}+1)}{(\frac{n}{3^n}+\frac{1}{3^n}+3)} = \frac{1}{3} < 1$ — сходится по признаку Даламбера $\Rightarrow$ исходный ряд сходится абсолютно по первому признаку сравнения
   (b) Способ 2:
      i. $\frac{n}{n+3^n} < \frac{n}{3^n}$
      ii. $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1$ — сходится по признаку Даламбера $\Rightarrow$ исходный ряд сходится абсолютно
      iii. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1$ — сходится по радикальному признаку Коши

План контрольной

1. Найти сумму ряда
2. 5 примеров на числовые ряды с положительными членами
3. 2 примера на знакопеременные ряды (1 на Тейлора, 1 степенной)

Степенные ряды

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$
2. Признаки сходимости:
   (a) Признак Даламбера: $\lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n}|<1 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}| = |x-x_0|\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$
      i. $|x-x_0| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|}$ — радиус сходимости $R_{\text{сх}}$
   (b) Радикальный признак Коши: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n(x-x_0)^n} = |x-x_0|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} < 1$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}\cdot x^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}$
   (a) По признаку Даламбера: $\lim_{n\to\infty}|\frac{2^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}\cdot\frac{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}{2^{n-1}x^{n-1}}| = |x|\frac{2}{\sqrt{3}} < 1$
   (b) $|x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$ — радиус сходимости; Область сходимости: $(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$
   (c) $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$
      i. Сравним с $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n-1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4}$ — $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ **сходится** как $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (ряд Дирихле с $\alpha=2$)
   (d) $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$
      i. $\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{1}{(2n-1)^2}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ — из пункта (c) ряд сходится $\Rightarrow$ исходный ряд **сходится абсолютно**
   (e) Ответ: $R_{\text{сх}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; Область сходимости: $[-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}]$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\ln^n(n+1)}$
   (a) По радикальному признаку Коши: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(x-2)^n}{\ln^n(n+1)}} = |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)} = |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = |x-2|\cdot 0 < 1$
   (b) Ответ: $R_{\text{сх}}=\infty$; Область сходимости: $(-\infty;\infty)$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n n!}{3^n}$
   (a) По признаку Даламбера: $\lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}| = \lim_{n\to\infty}|\frac{(x-1)(n+1)}{3}| = |x-1|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3} = |x-1|\cdot\infty < 1$
   (b) Ответ: $R_{\text{сх}}=0$; Область сходимости: $x=1$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}4^n(\frac{3n+1}{3n+2})^n(x-6)^{2n}$
   (a) По радикальному признаку Коши: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n(\frac{3n+1}{3n+2})^n(x-6)^{2n}} = 4(x-6)^2 < 1$

(b) $R_{\text{сх}} = \frac{1}{4}$; Область сходимости: $(6 - \frac{1}{2}; 6 + \frac{1}{2})$

(c) $x = 6 + \frac{1}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n (\frac{3n+1}{3n+2})^n (\frac{1}{4})^n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3n+1}{3n+2})^n$

i. $\lim_{n\to\infty} (\frac{3n+1}{3n+2})^n = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{-1}{3n+2})^{\frac{3n+2}{-1} \cdot \frac{-1}{3n+2} \cdot n} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{3n+2}} = e^{-\frac{1}{3}} \neq 0$ — ряд **расходится** по неоходимому признаку

(d) $x = 6 - \frac{1}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n (\frac{3n+1}{3n+2})^n (-1)^{2n} (\frac{1}{4})^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} (\frac{3n+1}{3n+2})^n$

i. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} (\frac{3n+1}{3n+2})^n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3n+1}{3n+2})^n$ — ряд расходится согласно пункту (c)

(e) Ответ: $R_{\text{сх}} = \frac{1}{4}$, ...

Часть XV
Семинар 7 (15.10.15)

Ряд Фурье

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_k^2 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} (f(x))^2 dx - \frac{a_0^2}{2}$

(a) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + B_n \sin \frac{\pi n x}{l}$

(b) $u_n(x) = a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + B_n \sin \frac{\pi n x}{l}$
$u_1(x) = a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + B_1 \sin \frac{\pi x}{l}$
$u_2(x) = a_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + B_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$
$u_3(x) = a_3 \cos \frac{3\pi x}{l} + B_3 \sin \frac{3\pi x}{l}$

Часть XVI
Лекция 7 (16.10.15)

Контрольная работа №1

1. Принести 2 двойных листа

2. Задания:

(a) Найти сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+3n+2}$

(b) Исследовать ряд на сходимость

i. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{2}{n^2}$

A. $\lim_{n\to\infty} n^2 \sin\frac{2}{n^2} = 2 \neq 0$ — ряд **расходится** по необходимому признаку сходимости

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin 5n}{n^4}$

A. $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sin 5n}{n^4} = 0$ — необходимый признак выполняется, продолжаем исследование

B. $\frac{1+\sin 5n}{n^4} \leq \frac{1}{n^4}$ — сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$, который сходится (ряд Дирихле с $\alpha = 4$)

C. $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sin 5n}{n^4} \cdot \frac{n^4}{1} = 1 \pm 1 < \infty$ — ряд **сходится** по предельному признаку сравнения

iii. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin^3\frac{1}{\sqrt{n}}$

A. $\lim_{n\to\infty} \sin^3\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ — необходимый признак выполняется, продолжаем исследование

B. Исследуем ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^3\frac{1}{\sqrt{n}}$

C. Сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$, который сходится ($\alpha < 1$)

D. $\lim_{n=1} \frac{\sin^3\frac{1}{\sqrt{n}}}{n^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{-\frac{3}{2}}}{n^{-\frac{3}{2}}} = 1 < \infty$ — ряд сходится по предельному признаку сравнения, следовательно исходный ряд **асболютно сходится**

iv. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+3}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n+2})$

A. $\lim_{n\to\infty}\ln\frac{n+3}{n+2} = \ln 1 = 0$ — необходимый признак выполняется, продолжаем исследование

B. Сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится (ряд Дирихле с $\alpha = 1$)

C. $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n+2})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} = 1 < \infty$ — ряд **расходится** по предельному признаку сравнения

v. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

A. Признак Даламбера: $\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1$ — ряд **сходится** по признаку Даламбера

vi. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{9n^2+1}{2n^2+5})^n(-1)^n$

A. Исследуем ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{9n^2+1}{2n^2+5})^n$

B. $\lim_{n\to 1}\sqrt[n]{\frac{9n^2+1}{2n^2+5}} = \lim_{n\to\infty}\frac{9+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{5}{n^2}} = 4,5 > 1$ — ряд расходится по радикальному признаку Коши

C. Признак Лейбница: $\lim_{n\to\infty}(\frac{9n^2+1}{2n^2+5})^n = (\frac{9+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{5}{n^2}})^n = 4,5^{\infty} = \infty$ — ряд **расходится** по признаку Лейбница

(c) Область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}4^n(\frac{3n+1}{3n+2})^n(x-6)^{2n}$

i. $\lim_{n\to\infty}|\sqrt[n]{4^n(\frac{3n+1}{3n+2})^n(x-6)^{2n}}| = \lim_{n\to\infty}|4\frac{3n+1}{3n+2}(x-6)^2| =$
$= 4(x-6)^2 < 1$; $(x-6)^2 < \frac{1}{4}$; $-\frac{1}{2} < x-6 < \frac{1}{2}$

ii. $R_{\text{сх}} = \frac{1}{2}$; Область сходимости: $(\frac{11}{2};\frac{13}{2})$

iii. $x = \frac{11}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty}4^n(\frac{3n+1}{3n+2})^n\frac{(-1)^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{3n+1}{3n+2})^n$

A. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{-1}{3n+2})^{\frac{3n+2}{-1}\cdot\frac{-1}{3n+2}\cdot n} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{3n+2}} = e^0 = 1 \neq 0$ — ряд **расходится** по признаку Лейбница

iv. $x = \frac{13}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty}4^n(\frac{3n+1}{3n+2})^n\frac{1}{4^n}$ — **расходится** (см. выше)

v. Ответ: $R_{\text{сх}} = \frac{1}{2}$; Область сходимости: $(\frac{11}{2};\frac{13}{2})$

(d) Разложить функцию $y = \frac{3}{4-7x}$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = 1$

i. Замена: $t = x - 1$; $t_0 = 0$; $x = t + 1$

ii. $\varphi(t) = \frac{3}{-3-7t} = -\frac{1}{1+\frac{7}{3}t}$

iii. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$; $|x| < 1$

iv. $\varphi(t) = -(1 - \frac{7}{3}t + (\frac{7}{3}t)^2 - (\frac{7}{3}t)^3 + ...)$; $|t| < \frac{3}{7}$

v. $y = -1 + \frac{7}{3}(x-1) - (\frac{7}{3}(x-1))^2 + (\frac{7}{3}(x-1))^3 - ...$; $|x-1| < \frac{3}{7}$; $\frac{4}{7} < x < \frac{10}{7}$

7 Ряды Тейлора

7.1 Постановка задачи

1. По заданной функции узнать, может ли эта функция на заданном промежутке служить суммой степенного ряда $\Rightarrow$ разложение функции в степенной ряд.

2. **Теорема Тейлора** (из 1 семестра): Для всякой функции $f(x)$, определенной в окрестности $U(a)$ и имеющей в этой окрестности непрерывные производные до $(n+1)$ порядка включительно, $\forall x \in U(a)$ справедливо представление этой функции по формуле Тейлора.

   (a) $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$ (7.1)

   (b) $R_n(x)$ — **остаточный член** формулы Тейлора

   i. В форме **Пеано**: $R_n(x) = \overline{o}[(x-a)^n]$

   ii. В форме **Лагранжа**: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, $a < \xi < x$ или $a > \xi > x$

   (c) При $a = 0$ формула (7.1) называется **формулой Маклорена**.

7.2 Необходимое условие разложимости функции в ряд Тейлора и Маклорена

1. Рассмотрим функцию $f(x)$, у которой существуют непрерывные производные всех порядков $\forall x \in U(a)$.

2. Запишем степенной ряд по степеням $(x-a)$. Коэффициенты ряда берем из формулы Тейлора (7.1).

3. $f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ...$ (7.2)

4. Определение: **Рядом Тейлора** в точке a для функции $f(x)$, имеющей непрерывные производные всех порядков в окрестности точки a, называется степенной ряд (7.2), коэффициенты которого являются коэффициентами формулы Тейлора.

   (a) Если $a = 0$, то ряд называется **рядом Маклорена**. $f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + ...$ (7.3)

5. Теорема 1 (необходимое условие разложимости): Если ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$ в интервале $|x-a| < R$, то есть имеет место равенство $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ (7.4), то остаток ряда $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

7.3 Критерий разложимости функции в ряд Тейлора (Маклорена)

1. Теорема 2: Для того, чтобы бесконечно дифференцируемая в $U(a)$ функция $f(x)$ раскладывалась в сходящийся к ней ряд Тейлора, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Тейлора (7.1) при $n \to \infty$ стремился к нулю, то есть $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ (7.5).

2. Теорема 3: Если фукнция $f(x)$ в данном промежутке имеет производные любого порядка, ограниченные в своей совокупности, то функция $f(x)$ раскладывается в данном промежутке в сходящийся к ней ряд Тейлора.

3. Теорема 4 (единственности разложения функции в ряд Тейлора): Если функция $f(x)$ представлена в виде сходящегося к ней степенного ряда $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ (7.6) и областью сходимости $|x-a| < R$, то этот ряд является её рядом Тейлора, то есть $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ (7.7).

7.4 Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций

1. $f(x) = e^x$, $a = 0$
   (a) $f^{(n)}(0) = 1$
   (b) $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$
   (c) При $n \to \infty$ $|f^{(n)}(x)| \le e^M \Rightarrow$ по теореме 3: $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$
   (d) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$ (7.8)
   (e) Ряд сходится $\forall x$, т.е. $R_{\text{сх}} = +\infty$

2. $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $x \in R$
   (a) $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + ...$ (7.9)
   (b) $R_{\text{сх}} = \infty$

3. $f(x) = \cos x$, $a = 0$, $x \in R$
   (a) $\cos x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + ...$ (7.10)
   (b) $R_{\text{сх}} = \infty$

4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $x \in (-1, 1)$ (7.11)
   (a) $\ln(3+2x) = \ln(3+2t+2) = \ln(5+2t) = \ln 5 + \ln(1 + \frac{2}{5}t)$
      i. $-1 < \frac{2}{5}t \le 1$
      ii. $1 - \frac{5}{2} < x \le 1 + \frac{5}{2}$ — область сходимости
      iii. $= \ln 5 + \frac{2}{5}t - (\frac{2}{5}t)^2\frac{1}{2} + ... + (-1)^{n+1}(\frac{2}{5}t)^n\frac{1}{n} =$
      $= \ln 5 + \frac{2}{5}(x-1) - (\frac{2}{5})^2(x-1)^2\frac{1}{2} + ... + (-1)^{n+1}(\frac{2}{5})^n(x-1)^n\frac{1}{n}$

5. $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + ...$ (7.12)

Часть XVII

Семинар 8 (22.10.15)

Образец контрольной работы №1

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{\sqrt{n^2+1}}$
   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{\sqrt{n^2+1}} = 2$ — ряд **расходится** по необходимому признаку сходимости
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{\sqrt{n!}}$
   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!}{\sqrt{(n+1)!}} \cdot \frac{\sqrt{n!}}{(2n-1)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{0} = \infty$ — ряд **расходится** по признаку Даламбера
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{3}{n})^{n^2}$
   (a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1-\frac{3}{n})^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{3}{n})^n = e^{-3} < 1$ — ряд **сходится** по радикальному признаку Коши
4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^3}} \cos\frac{\pi}{n}$
   (a) Исследуем ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}} \cos\frac{\pi}{n}$
   (b) Сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$, который сходится $(\alpha < 1)$
   (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{-\frac{3}{2}}}{n^{-\frac{3}{2}}} \cos\frac{\pi}{n} = 1 < \infty$ — ряд сходится по предельному признаку сравнения, следовательно исходный ряд **абсолютно сходится**
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)(x+1)^{3n}}{5^n}$
   (a) $x_0 = -1$
   (b) $u_n(x) = \frac{(n+2)(x+1)^{3n}}{5^n}$
   (c) Признак Даламбера: $\lim_{n\to\infty} |\frac{(n+3)(x+1)^{3n+3}}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{(n+2)(x+1)^{3n}}| = |\frac{(x+1)^3}{5}| \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+2} = |\frac{(x+1)^3}{5}| < 1$
      i. $|(x+1)^3| < 5$; $|x+1| < \sqrt[3]{5}$; $R_{\text{сх}} = \sqrt[3]{5}$; Область сходимости: $(-\sqrt[3]{5}-1; \sqrt[3]{5}-1)$
   (d) $x = -\sqrt[3]{5}-1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)(-1)^{3n}(\sqrt[3]{5})^{3n}}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{3n}(n+2)$ — **расходится** по необходимому признаку
   (e) $x = \sqrt[3]{5}-1$: $\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)$ — **расходится** по необходимому признаку
   (f) Ответ: $R_{\text{сх}} = \sqrt[3]{5}$; Область сходимости: $(-\sqrt[3]{5}-1; \sqrt[3]{5}-1)$
6. $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

(a) Разложение по основанию $(x - \frac{\pi}{4})$

(b) Замена: $t = x - \frac{\pi}{4}$; $t_0 = 0$

(c) $\varphi(t) = \cos(t + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t)$

(d) $\varphi(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!})$; $t \in (-\infty; \infty)$

(e) $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-\frac{\pi}{4})^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-\frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!})$; $x \in (-\infty; \infty)$

(f) $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - (x - \frac{\pi}{4}) - \frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2!} + \frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!} + ...)$; $R_{\text{сх}} = \infty$

7. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1}$

(a) $a_n = \frac{2}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$

(b) $a_1 = 1 - \frac{1}{3}$
$a_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$
$a_3 = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$

(c) $S_n = 1 - \frac{1}{2n+1}$

(d) $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{2n+1}) = 1$

Часть XVIII

Лекция 8 (23.10.15)

7.5 Применение степенных рядов

1. Приближенное вычисление функций

(a) Ошибка оценивается по:

i. остаточному члену (в формуле Тейлора)

ii. остатку ряда (ряд Лейбница)

2. Раскрытие неопределенностей при вычислении пределов

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$

3. Решение дифференциальных уравнений

(a) $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$; $y(0) = y_0$; $y'(0) = y_0'$; ...; $y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$

(b) Решение в общем виде: $y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + ...$

(c) Коэффициенты находятся методом неопределенных коэффициентов

(d) Пример: $y' = y^2 + x^3$; $y(0) = \frac{1}{2}$; $y'(0) = \frac{1}{4}$

i. $y'' = 2yy' + 3x^2$; $y''(0) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

ii. $y''' = 2(y')^2 + 2yy'' + 6x$; $y'''(0) = 2 \cdot \frac{1}{4^2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

iii. $y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1!}x + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2!}x^2 + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3!}x^3 + ...$

8 Ряды Фурье

8.1 Постановка задачи

1. Задача: Представить периодическую функцию (период 2π) в виде суммы конечного или бесконечного числа простейших периодических функций вида $\sin(nx + \alpha_n)$: $f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \alpha_n)$ (8.1)

2. Обозначим $a_n = A_n \sin \alpha_n$; $b_n = A_n \cos \alpha_n$

3. $f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ (8.2)

8.2 Тригонометрическая система функций Тригонометрический ряд Фурье

1. Определение 1: Система функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ..., \sin nx, \cos nx$ (8.3) называется **тригонометрической системой функций**.

2. Теорема 1: Тригонометрическая система функций ортогональна на $[-\pi; \pi]$.

3. Найдем коэффициенты ряда (8.2). Для этого умножим (8.2) на $\cos nx$ и проинтегрируем.

   (a) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cdot \cos^2 nx \cdot dx =$
   $= \int_{-\pi}^{\pi} a_n \frac{1+\cos 2x}{2} dx = a_n \pi$

   (b) $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \cdot dx$ (8.4)

   (c) Аналогично умножаем на $\sin nx$

   (d) $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \cdot dx$ (8.5)

   (e) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} A_0 dx = 2\pi A_0$

   (f) $a_0 = 2A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$

4. Определение 2: **Тригонометрическим рядом Фурье на отрезке** $[-\pi; \pi]$ **для функции** $f(x)$ называется ряд $\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ (8.7), где:

   (a) $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$

   (b) $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \cdot dx$

   (c) $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \cdot dx$

8.3 Теорема Дирихле

1. Определение 3: Говорят, что функция $f(x)$ **удовлетворяет условию Дирихле на отрезке** $[a, b]$, если этот отрезок может быть разбит на конечное число частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_N = b$ так, что на каждом интервале (x_{i-1}, x_i) функция непрерывна, ограничена и монотонна.

   (a) Замечание:

      i. $\exists \lim_{x \to x_{i-1}+} f(x) = f(x_{i-1+})$ ...
      ii. $\exists \lim_{x \to x_{i-1}-} f(x) = f(x_{i-1-})$ ...
      iii. ... $\Rightarrow f(x)$ может иметь разрывы только первого рода

2. Теорема 2 (теорема Дирихле)

   (a) Пусть:

      i. $f(x)$ периодична с $T = 2\pi$
      ii. $f(x)$ удовлетворяет условию Дирихле на отрезке $[-\pi, \pi]$

   (b) Тогда:

      i. Тригонометрический ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится во всех точках, причем $\Phi(x) = f(x)$ в точках непрерывности $f(x)$, а в точках разрыва $\Phi(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ (8.8)

         A. $f(x-0) = \lim_{x \to x-0} f(x)$

8.4 Представление ряда Фурье функции произвольного периода

1. Пусть:

   (a) $f(x)$ определена и кусочно дифференцируема на отрезке $[-l, l]$

2. Тогда:

   (a) Сделав замену $x = \frac{tl}{\pi}$ (8.9),получим, что $f(x) = f(\frac{tl}{\pi}) = g(t)$, где $g(t)$ определена на $[-\pi, \pi]$
   (b) $f(x) \to \frac{a_0}{l} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x)$ (8.10)

      i. $a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)dx$
      ii. $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos(\frac{n\pi}{l}x)dx$
      iii. $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin(\frac{n\pi}{l}x)dx$

3. **Равенство Парсеваля**: $\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f^2(x)dx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ (8.12)

   (a) Пример (использование равенства Парсеваля): $y = x$, $(0, 1)$, $l = 1$, по $\cos x$

      i. $a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 xdx = 1$

ii. $a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x\cos\pi x dx = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \frac{4}{n^2\pi^2} & n = 2k+1 \end{cases}$

iii. $a_n = -\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2}$

iv. $x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n}{l}x = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}$

A. $x = 0$: $0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ — полезное равенство

B. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

v. Выписываем равенство Парсеваля:

vi. $\frac{2}{1}\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2} + (\frac{4}{\pi^2})^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$, откуда выражается сумма

vii. $\frac{2}{3}x^3|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{16}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = (\frac{2}{3} - \frac{1}{2})\frac{\pi^4}{16} = \frac{\pi^4}{96}$

8.5 Разложение функции по синусам и косинусам

1. Пусть:

   (a) $\varphi(x)$ — четная функция

2. Тогда:

   (a) $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx = 2\int_0^{\pi}\varphi(x)dx$

3. Пусть:

   (a) $\psi(x)$ — нечетная функция

4. Тогда:

   (a) $\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)dx = 0$

5. Пусть:

   (a) $f(x)$ — четная функция, заданная на полупериоде

6. Тогда:

   (a) $f(x)\cos nx$ — четная функция

   (b) $f(x)\sin nx$ — нечетная функция

   (c) $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$

   (d) $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx \cdot dx$

   (e) $b_n = 0$

   (f) Равенство Парсеваля: $\frac{2}{l}\int_0^l f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$

7. Пусть:

   (a) $f(x)$ — нечетная функция, заданная на полупериоде

8. Тогда:

   (a) $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \cdot dx$
   (b) $a_0 = 0$; $a_n = 0$
   (c) $\frac{2}{l}\int_0^l f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$

9. Примеры:

   (a) Разложить функцию $f(x) = 3 - x$, заданную на отрезке $[0,3]$ в тригонометрический ряд Фурье по $\sin x$

      i. $a_0 = 0$; $a_n = 0$
      ii. $b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)\sin(\frac{n\pi}{3}x)\cdot dx = \begin{vmatrix} u = 3 - x & du = -dx \\ dv = \sin(\frac{n\pi}{3}x) & v = -\frac{3}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{3}x) \end{vmatrix} =$
      $= \frac{2}{3}[-\frac{3}{n\pi}(3-x)\cos(\frac{n\pi}{3}x)|_0^3 - \int_0^3 \frac{3}{n\pi} - \cos(\frac{\pi n}{3}x)dx] =$
      $= \frac{2}{3}[\frac{9}{\pi n} - \frac{9}{n^2\pi^2}\sin(\frac{\pi n}{3}x)|_0^3] = \frac{6}{\pi n}$
      iii. $f(x) = \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(\frac{\pi n}{3}x)$
         A. $s_1(x) = \frac{6}{\pi}\sin\frac{\pi}{3}x$
         B. $s_2(x) = s_1(x) + \frac{6}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{3}x$
         C. $s_3(x) = s_2(x) + \frac{6}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{3}x$

Часть XIX

Лекция 9 (30.10.15) “Теория функций комплексного переменного”

1. Литература:

   (a) Привалов “Введение в теорию функций комплексного переменного”
   (b) Типовой расчет за 4 семестр

9 Функция комплексного переменного

1. Определение 1: **Комплексным числом** называется выражение вида $z = z + iy$ (9.1) (алгебраическая форма записи), где x, y — действительные числа, i — **мнимая единица**.

   (a) $x = Re\, z$ — действительная часть
   (b) $y = Im\, z$ — мнимая часть
   (c) Изображение на плоскости:
      i. Точка $M(x, y)$
      ii. Вектор $\vec{OM}$

2. Определение 2: Длина вектора z ($\vec{OM}$) называется **модулем** комплексного числа и обозначается $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Определение 3: Угол φ, образованный вектором $\vec{OM}$ с положительным направлением Ox, называется **аргументом** комплексного числа и обозначается $\varphi = Arg\, z$, определяется с точностью до 2πk, где $k \in Z$.
   (a) $Arg\, z = arg\, z + 2\pi k$ (9.2)
   (b) $-\pi < arg\, z \le \pi$

4. Пример 1: $z = -1 + i$
   (a) $|z| = \sqrt{2}$
   (b) $\operatorname{tg}\varphi = -1$; $arg\, z = \frac{3\pi}{4}$; $Arg\, z = arg\, z + 2\pi k = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

5. Тригонометрическая форма (вывод): $z = x + iy = |z|(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
   (a) $\cos\varphi = \frac{x}{|z|}$; $\sin\varphi = \frac{y}{|z|}$
   (b) $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (9.3)

6. Определение 4: Плоскость, точки которой отображают комплексные числа, называется **комплексной плоскостью**.

7. Пример 2: $z = -1 + i$; $|z| = \sqrt{2}$; $\varphi = \frac{3\pi}{4}$
   (a) $z = -1 + i = \sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k) + i\sin(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k))$
   (b) $z = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

8. Определение 5: Два комплексных числа **равны**, тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на $2\pi k$.
   (a) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ Arg\, z_1 = Arg\, z_2 + 2\pi k \end{cases}$

9. Определение 6: Два числа $x + iy$ и $x - iy$, отличающиеся только знаком мнимой части, называются **сопряженными**
   (a) $z = x + iy$; $\overline{z} = x - iy$

9.1 Действия над комплексными числами

1. Определение 7: **Суммой (разностью)** комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z = z_1 \pm z_2 = ((x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2))$
2. Определение 8: **Произведением** комплексных чисел z_1 и z_2 называется $z = z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
   (a) В тригонометрической форме: $z = z_1 z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$ (9.4)
   (b) Произведение сопряженных чисел: $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$
3. Определение 9: **Частным** комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое число z, которое удовлетворяет уравнению $z_1 = z \cdot z_2$
   (a) Если $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2)$ и $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$ (9.5)
4. Обобщение формулы (1.4) : **Возведение в степень** $z^n = (|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ (9.6) — **формула Муавра**
5. Определение 10: **Извлечение корня** — обратное возведение в степень. Число z_1 называется **корнем степени** n **из числа** z, если $z_1^n = z$, обозначается $z_1 = \sqrt[n]{z}$.
   (a) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2\pi k}{n})$ (9.7)
   (b) Корень степени n имеет n значений.
   (c) Примеры: $\sqrt[6]{-1}$; $\sqrt[3]{8}$

9.2 Вводное определение функции комплексного переменного (ФКП)

1. Определение 11: ε**-окрестностью точки** z_0 $\rho_\varepsilon(z_0)$ называется множество точек z, отстоящих от z_0 меньше, чем на ε, т.е. $\rho_\varepsilon(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$.
2. Определение 12: Точка z_0 называется **внутренней точкой множества** E, если она принадлежит E вместе с некоторой своей окрестностью, т.е. $\exists\varepsilon > 0 : \rho_\varepsilon(z_0) \in E$.
3. Определение 13: Точка z_0 называется **граничной точкой множества** E, если в любой окрестности точки z_0 существуют точки, принадлежащие E и не принадлежащие E.
4. Определение 14: **Областью** D комплексной плоскости z называется множество точек E такое, что:
   (a) Каждая точка z — внутренняя (свойство открытости)
   (b) Любые две точки $z_1 \in D$ и $z_2 \in D$ можно соединить ломаной с конечным числом звеньев, целиком лежащих в D (свойство связности)
5. Определение 15: Совокупность граничных точек области D называется **границей** Γ **области** D.
6. Определение 16: Замкнутая кривая на комплексной плоскости, не имеющая самопересечений, называется **замкнутым контуром**.
   (a) Замечание: Границей области может быть как замкнутый контур, так и незамкнутая кривая и любое дискретное множество точек. Например, границей области $|z| \pm 0$ является точка $z = 0$.
7. Определение 17: Область D с присоединенной к ней границей называется **замкнутой областью** и обозначается $\overline{D} = D \cup \Gamma$

8. Определение 18: Область D называется **ограниченной**, если найдется такое число R, что $\forall z \in D: |z| < R$
9. Определение 19: Линия называется **связной**, если из любой её точки можно пройти по этой линии в другую её точку.
10. Определение 20: **Порядком связности ограниченной области** D называется число связных частей, на которые разбивается её граница.
11. Определение 21: Если некоторое множество точек комплексной плоскости и каждому значению $z \in E$ по определенному закону f поставлено в соответствие одно или несколько чисел W, то на множестве E определена **функция комплексного переменного** $W = f(z)$ (9.8).
    (a) Замечание: Если каждому z соответсвует лишь одно значение W, то функция **однозначная**, а если два и более — **многозначная**.
    (b) Пример:
        i. $W = |z|$ — однозначная
        ii. $W = Re\, z$ — однозначная
        iii. $W = \sqrt[n]{z}$ — многозначная
        iv. $W = Arg\, z$ — бесконечно-значная функция
    (c) Замечание: Геометрическим заданием функции $f(z)$ на области D означает, что задано отображение области D на области G или W
    (d) Замечание:
        i. Пусть:
            A. $z = x + iy$
            B. $W = f(z)$ — комплексное число
        ii. Тогда:
            A. $W = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y) = Re\, f(z)$, $v(x, y) = Im\, f(z)$
        iii. Пример: $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2y$
            A. $u(x, y) = x^2 - y^2$
            B. $v(x, y) = 2xy$

Часть XX

Семинар 9 (5.11.15)

1. $z = x + iy$ — алгебраическая форма комплексная комплекснгого числа
    (a) $x = Re\, z$
    (b) $y = Im\, z$
    (c) $z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ — тригонометрическая форма к.ч.
    (d) $z = |z|e^{i\varphi}$
    (e) $arg\, z = \varphi$ — главное значение аргумента

(f) $Arg\,z = \varphi + 2\pi k$

2. $i = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$
   $i^5 = i$; $i^6 = -1$; $i^7 = -i$; $i^8 = 1$

3. $i^{2015} = -i$

Часть XXI

Лекция 10 (6.11.15)

9.3 Элементарные функции комплексного переменного

1. Определение 22: **Элементарными функциями** комплексного переменного называются функции, которые получаются из элементарных функций вещественного переменного, определяемых разложением в степенной ряд по следующему правилу:

   (a) Если $y = f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + ...$ — элементарная функция вещественного переменного, то $w = f(z) = a_0 + a_1z + ... + a_nz^n + ...$ — элементарная функция комплексного переменного, определенная для тех z, для которых ряд сходится.

2. Степенные функции: $w = z^n$, $n \in Z$, $n > 0$ — отображает угол величины $\frac{\pi}{n}$ на плоскости

   (a) $|w| = |z|^n$

      i. $arg\,w = n \cdot arg\,z$

3. Показательные функции: $w = e^z$

   (a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (9.9)

   (b) $e^{iy} = 1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2!} + ... + \frac{(iy)^n}{n!} + ... =$
   $= (1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - ...) + i(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - ...) =$
   $= \cos y + i \sin y$ (1.10)

   (c) $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ — **формула Эйлера**

   (d) Введем понятие показательной функции с комплексным показательным $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ (9.12)

      i. Ряд (9.12) абсолютно сходится, так как сходится ряд из модулей $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$

      ii. $R_{\text{сх}} = \infty$

   (e) Из (9.9) и (9.11) следует, что $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

   (f) $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ — **формула Эйлера**

      i. $Re\,e^z = e^x \cos y = u(x, y)$

      ii. $Im\,e^z = e^x \sin y = v(x, y)$

(g) Отображение:

i. $|w| = e^x$

ii. $arg\, w = y$

(h) $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$

(i) Замечание: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$ (9.14)

4. Тригонометрические функции

(a) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ (9.15)

(b) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ (9.16)

i. ... (9.15) и (9.16) абсолютно сходятся на всей комплексной плоскости

(c) $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ (9.17)
$e^{-iz} = \cos z - i\sin z$ (9.18)

i. $e^{iz} + e^{-iz}$: $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ (9.19)

ii. $e^{iz} - e^{-iz}$: $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ (9.20)

iii. ... (9.19) и (9.20) — **формулы Эйлера**

(d) Свойства:

i. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

ii. $\sin 2z = 2\sin z\cos z$

(e) Периодичность:

i. $\sin(z+2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)}-e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

(f) $\cos i = \frac{e^{ii}+e^{-ii}}{2} = \frac{1}{2}(e + \frac{1}{e}) > 1$

(g) $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$; $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$

5. Гиперболические функции:

(a) По аналогии с функциями действительного переменного вводим:

(b) $\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

(c) $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ (9.21)

(d) ... которые определены на всей комплексной плоскости и имеют период $T = 2\pi i$

(e) $\operatorname{ch} z = \cos iz$ (9.22)

(f) $\operatorname{sh} z = -i\sin iz$ (9.22)

(g) $\sin z = \sin(x+iy) = \sin x\cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y$ (9.23)

(h) $\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$

(i) ... формула (9.23) позволяет вывести $u(x, y)$ и $v(x, y)$

6. Комплексный логарифм: $w = Ln\, z$

   (a) Функция, обратная к показательной $e^w = z$

   (b) Полагая $w = u + iv$, а $z = x + iy$, найдем отсюда u и v:

   (c) $e^w = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v) = x + iy = |z|(\cos\, Arg\, z + i \sin\, Arg\, z)$

      i. $|z| = e^u$

      ii. $v = Arg\, z = arg\, z + 2\pi k,\ k \in Z$

   (d) $w = Ln\, z = u + iv = \ln|z| + i(arg\, z + 2\pi k) = \ln|z| + i \cdot Arg\, z$

   (e) $Ln\, z$ — бесконечнозначная функция, так как одному z соответствует бесконечное число w, отличающихся на 2π.

   (f) Определение 23: **Главным значением логарифма** называется $\ln z = \ln|z| + i \cdot arg\, z$

   (g) Пример: $Ln\, i = \ln|i| + i(arg\, i + 2\pi k) = \ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$

7. Обобщенная степенная и показательная функция

   (a) $w = a^z = e^{z \cdot Ln\, a}$

   (b) $w = z^\alpha = e^{\alpha\, Ln\, z}$

   (c) Пример: $i^{1+i} = e^{(1+i)(i(\frac{\pi}{2}+2\pi k))}$

10 Предел, непрерывность, дифференцирование ФКП

10.1 Предел и непрерывность ФКП

1. $f(z)$ определена в некоторой окрестности $\dot{U}(z_0)$

2. Определение 1: Число $A \neq \infty$ называется пределом $f(z)$ при $z \to z_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\ 0 < |z - z_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon$ и обозначается $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$

3. Определение 2: Функция $f(z)$ называется **непрерывной в точке** z_0, если она определена в окрестности этой точки и $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

   (a) $\Delta z = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$

4. Определение 3: Функция $f(z)$ называется **непрерывной в точке** z_0, если она определена в окрестности этой точки и $\lim_{\Delta z \to 0} \Delta f(z_0) = 0$

5. Определение 4: Функция, непрерывная в любой точке z области D, называется **непрерывной в области** D.

   (a) Замечание: Правила действий с пределами и непрерывными функциями действительного переменного остаются справедливыми для функций комплексного переменного.

6. Теорема 1 (о непрерывности функции): Для того, чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была непрерывна в точке z_0, необходимо и достаточно, чтобы $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были непрерывными в точке $M(x_0, y_0)$.

10.2 Производная ФКП

1. Определение 5: **Производной** $f'(z)$ **функции** $f(z)$ **в точке** z называется предел отношения приращеения функции $\Delta f(z)$ к приращению аргумента Δz при $\Delta z \to 0$. $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = f'(z)$ (10.4)
2. Определение 6: Функция называется **дифференцируемой в точке** z, если $\exists f'(z)$ в этой точке.
   (a) Из определения производной следует, что $\Delta f(z) = f'(z)\Delta z + \alpha(\Delta z)$ (10.5, где $\alpha(\Delta z)$ — бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δz. $\frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} \to 0$ при $\Delta z \to 0$
3. Определение 7: Первое слагаемое в формуле 10.5 называется **дифференциалом ФКП** $f(z)$ и обозначается $df(z) = f'(z)\Delta z$. (10.6)
4. Определение 8: Функция $f(z)$ называется **регулярной** или **аналитичной** в области D, если она:
   (a) Однозначна в этой области
   (b) Имеет конечную производную в каждой точке области D
5. Определение 9: Функция $f(z)$ называется **аналитичной в точке** z_0, если она дифференцируема в самой точке z_0 и некоторой её окрестности.
   (a) Замечание: Понятие аналитичности сильнее условия дифференцируемости, так как подразумевает существование производной как в самой точке, так и в её окрестности.
6. Пример: $f(z) = z^2$
   (a) $\Delta f(z) = (z+\Delta z)^2 - z^2 = 2\Delta z\, z + (\Delta z)^2$
   (b) $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0}(\frac{2\Delta z\, z}{\Delta z} + \frac{(\Delta z)^2}{\Delta z}) = 2z$

10.3 Условие Коши-Римана-Даламбера-Эйлера

1. Теорема 2 (необходимое и достаточное условие дифференцируемости ФКП): Для того, чтобы функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ была диффернцируемой в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы:
   (a) $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были дифференцируемы в точке $M(x,y)$
   (b) имело место следующее соотношение: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (проверять нужно <u>оба</u> условия) (2.7)
2. $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ (2.8)

Часть XXII

Лекция 11 (13.11.15)

1. Пример 1: $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy$

   (a) $u(x, y) = x^2 - y^2$
   (b) $v(x, y) = 2xy$
   (c) $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 2x$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 2y$ — условие Коши-Римана выполняется везде $\Rightarrow$ z^2 **аналитична** на всей комплексной плоскости

2. Пример 2: $f(z) = \overline{z} = x - iy$
   (a) $u(x, y) = x$
   (b) $v(x, y) = -y$
   (c) $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$ — усовие Коши-Римана не выполняется $\Rightarrow$ функция **не аналитическая**
   (d) Если в выражение включено $\overline{z}$, то функция **не аналитическая**

3. Пример 3: $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$
   (a) $u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) = 0$
   (b) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ — условие Коши-Римана выполняется только для $x = 0$, $y = 0$ $\Rightarrow$ функция **аналитическая** в точке $(0, 0)$

4. Замечание: Для аналитических функций справедливы все правила дифференцирования, а именно:
   (a) $(f_1(z) \pm f_2(z))' = f_1'(z) \pm f_2'(z)$
   (b) $(f_1(z) \cdot f_2(z))' = f_1'(z) \cdot f_2(z) + f_1(z) \cdot f_2'(z)$
   (c) $(\frac{f_1(z)}{f_2(z)})' = \frac{f_2(z) \cdot f_1'(z) - f_2'(z) \cdot f_1(z)}{f_2^2(z)}$
   (d) Таблица производных:
      i. $(z^n)' = nz^{n-1}$
      ii. $(\sin z)' = \cos z$
      iii. $(\cos z)' = -\sin z$
      iv. $(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$
      v. $(\operatorname{ctg} z)' = \frac{-1}{\sin^2 z}$
      vi. $(e^z)' = e^z$
      vii. $(ch\, z)' = sh\, z$
      viii. $(sh\, z)' = ch\, z$
      ix. $(Ln\, z)' = \frac{1}{z}$

10.4 Связь аналитических и гармонических функций

1. Пусть:
   (a) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — аналитическая функция в области D
2. Тогда:
   (a) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} & \text{по } x \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} & \text{по } y \end{cases}$
   (b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (10.9) — **уравнение Лапласа**
   (c) $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$ (10.10) — **уравнение Лапласа**
3. Определение 10: Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются **гармоническими**.
4. Теорема 3: Если в области D заданы две гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, связанные уравнениями Коши-Римана, то функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то полученная функция является **аналитической в** D.
5. Определение 11: Две грамонические функции, связанные условием Коши-Римана, называются **сопряженными**.
6. Пример ТР: Может ли функция $v(x, y) = 2xy + y$ являться мнимой частью функции $f(z)$ и, если да, найти $f(z)$.
   (a) Проверяем гармоничность $v(x, y)$:
      i. $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$
      ii. $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$
      iii. $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \Longrightarrow v(x, y)$ — гармоническая функция, является мнимой частью $f(z)$
   (b) Условие Коши-Римана:
      i. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1$
         A. $u = \int(2x + 1)dx = x^2 + x + \varphi(y)$
      ii. $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$
         A. $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(y) = -2y$
         B. $\varphi(y) = -y^2 + c_1$
      iii. $u = x^2 + x - y^2 + c_1$
   (c) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 + x - y^2 + c_1 + i(2xy + y)$
      i. $x = z$, $y = 0$: $f(z) = z^2 + z + c_1 + i \cdot 0 = z^2 + z + c_1$
   (d) Ответ: $f(z) = z^2 + z + c_1$

11 Интеграл функции комплексного переменного

11.1 Определение

1. Разобьем $z_0 = A, z_1, ..., z_n = B$
2. $\forall [z_{k-1}, z_k] \to \zeta_k$
3. Составим интегральную сумму: $\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$ (11.1)
4. Определение 1: Предел интегральной суммы (11.1) при $n \to \infty$ и $\max|z_k - z_{k-1}| \to 0$, если он существует, независим от способа разбиения L, от выбора точек ζ_k, то этот предел называется **интегралом** от функции $f(z)$ по кривой L. Обозначается: $\lim\limits_{n\to\infty} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \displaystyle\int_L f(z)dz$ (11.2)
5. Теорема 1: Если $f(z)$ определена и непрерывна на кривой L, то $\int_L f(z)dz$ существует.
6. $\int_L f(z)dz = \int_L u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int u(x,y)dy - v(x,y)dx$ (11.3)
7. Замечание: Так как (11.3) составлен из двух криволинейных интегралов, то свойства криволинейных интегралов сохраняются:
   (a) Аддитивность: $\int_{L+L_2} f(z)dz = \int_L f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz$
   (b) Линейность: $\int_L (f_1(z) \pm f_2(z))dz = \int_L f_1(z) \pm \int_L f_2(z)$
   (c) $\int_L f(z)dz = -\int_{L^-} f(z)dz$, где L^- — кривая, совпадающая с L и проходимая в противоположном направлении
   (d) Теорема об оценке: $|\int_L f(z)dz| \le \int_L |f(z)|dz \le Ml$, где L — гладкая, длины l; $M = max|f(z)|$
   (e) Замена переменной:
      i. Пусть:
         A. $z = z(t)$ — параметрическое задание кривой L
         B. $z(t_1) = A$, $z(t_2) = B$
      ii. Тогда:
         A. $\int_L f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f[z(t)]z'(t)dt$ (11.4)

11.2 Интегральная теорема Коши

1. Теорема 2 (Коши): Если D — односвязная конечная область, $f(z)$ — однозначная аналитическая в области D функция, тогда для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $L \subset D$, $\oint_L f(z)dz = 0$

Часть XXIII

Семинар 10 (19.11.15)

1. $\sin z - \cos z = 3$

(a) $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

(b) $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

(c) $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} - \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 3$

(d) $t = e^{iz}$

(e) $\frac{t-\frac{1}{t}}{2i} - \frac{t+\frac{1}{t}}{2} = 3$

(f) $\frac{t^2-1}{2it} - \frac{t^2+1}{2t} = 3$

(g) $\frac{(t^2-1)-i(t^2+1)}{2it} = 3$

(h) $(t^2-1) - i(t^2+1) = 6it$

(i) ...

Часть XXIV

Лекция 12 (20.11.15)

1. Теорема 3 (Коши для многосвязной области): Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой многосвязной области $\overline{D}$, ограниченной контурами $L_0, L_1, ..., L_n$, то интеграл, взятый по всей границе этой области и проходимый так, чтобы область $\overline{D}$ всё время оставалась с одной стороны, равен нулю.

   (a) Контур и разрезы превращают многосвязную область в односвязную, при которой справедлива теорема Коши $\int_L f(z)dz = 0$

   (b) $\int_{L_0} f(z)dz + \int_{l_1} f(z)dz + \int_{L_1} f(z)dz + \int_{l_1-} f(z)dz + ... =$
   $= \int_{L_0} f(z)dz + \int_{L_1} f(z)dz + ... + \int_{L_n} f(z)dz = 0$ (3.6)

   (c) Следствие: $\int_{L_0} = -\int_{L_1} - ... - \int_{L_n}$

      i. $\int_{L_0} = \int_{L_1-} + ... + \int_{L_n-}$

      ii. Т.е. интеграл от $f(z)$ по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам при условии, что обход всех контуров совершается в одном направлении.

2. Теорема 4: Для любой аналитической функции $f(z)$ в односвязной области D интеграл $\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$ является аналитической функцией в той же области D, причем $\Phi'(z) = f(z)$, т.е. $\Phi(z)$ является первообразной для $f(z)$.

   (a) Для интеграла от аналитической функции имеет место формула Ньютона-Лейбница: $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0)$

3. Теорема 5 (о существовании производных всех порядков у аналитической функции): Если $f(z)$ аналитическая в области D и непрерывна в $\overline{D}$, то во ссех внутренних точка области у функции $f(z)$ существуют производные любого порядка, причем сраведлива формула $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$, где $z_0 \in D$, L — граница области D.

12 Ряды Тейлора и Лорана

12.1 Ряд Тейлора

1. Теорема 1: Всякий степенной ряд $\sum c_n(z-z_0)^n$, сходящийся в круге $K_R : |z-z_0| < R$ сходится к аналитической функции внутри круга $f(z)$. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ (12.1), причем ряд можно почленно дифференцировать и производная суммы ряда равна сумме производных, а радиус сходимости при дифференцировании не меняется.

2. Определение 1: Степенной ряд (12.1) с коэффициентами, определяемыми формулами $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$, называется **рядом Тейлора** для функции $f(z)$.

12.2 Разложение функции, аналитической в круге, в степенной ряд

1. Теорема 2: Если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z-z_0| < R$, то в любой точке круга $f(z)$ единственным образом раскладывается в сходящийся к ней степенной ряд.

   (a) Замечание: В теореме 2 число R определяется радиусом круга, внутри которого функция аналитична. Если z_0 назвать центром разложения, то $\underline{R}$ определяется как расстояние от центра разложения до первой (ближайшей) точки, в которой условие аналитичности нарушается.

2. Пример: Разложить $f(z) = \frac{1}{z+3}$ в ряд по степеням $(z-1)$ и найти область сходимости полученного ряда.

   (a) $z_0 = 1$

   (b) $\frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z-1)+1+3} = \frac{1}{4+(z-1)} = \frac{1}{4(1+\frac{z-1}{4})} = \frac{1}{4}(1 - \frac{z-1}{4} + \frac{(z-1)^2}{4^2} + ...) =$
   $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-1)^n$

   (c) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...\ (-1, 1)$

   (d) Функция $f(z) = \frac{1}{z+3}$ аналитична всюду за исключением $z = -3$

   (e) $R_{\text{сх}} = z_0 - (-3) = 1 - (-3) = 4$

   (f) Область сходимости: $|z-1| < 4$

12.3 Ряд Лорана, его область сходимости

1. Определение 2: **Рядом Лорана** называется ряд вида $...\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + ... + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_1(z-z_0) + ... + c_n(z-z_0)^n + ... =$
   $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_1^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ (12.2), где z_0 — фиксированная точка, c_n — комплексные числа.

2. Областью сходимости ряда Лорана является общая часть областей сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ (12.3) и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ (12.4)

   (a) Область сходимости (12.3) — круг $|z-z_0| < l$. Внутри круга (12.3) сходится к функции $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$

   (b) Область сходимости (12.4) — внешность круга радиуса r, т.е. $|z-z_0| < r$ (т.к. заменой $\zeta = \frac{1}{z-z_0}$ ряд (12.4) становится обычным степенным рядом $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$ и сходится в круге $|\zeta| < \frac{1}{r} \Rightarrow |\frac{1}{\zeta}| > r$). Вне круга $|z-z_0| > r$ (12.4) сходится к аналитической функции $f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$.

   (c) Если $r < R$, то существует общая часть областей сходимости рядов $r < |z-z_0| < R$, в которой исходный ряд (12.2) сходится к аналитической функции $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

3. Теорема (Лорана): Функция $f(z)$ аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$, раскладывается единственным образом в сходящийся к ней ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$.
4. Определение 3: Часть ряда Лорана (12.3), содержащая положительные степени $(z - z_0)$ называется **правильной частью ряда Лорана**, а содержащая отрицательные степени (12.4) — **главной частью ряда Лорана**.
5. Пример: Разложить в ряд Лорана $f(z) = z^4 \cos \frac{1}{z}$
   (a) $z = 0$ — особая точка
   (b) $f(z) = z^4(1 - \frac{z^{-2}}{2!} + \frac{z^{-4}}{4!} - ...) = \underline{z^4 - \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{4!}} - \frac{1}{z^2 6!} + ...$
      i. Подчеркнута конечная действительнаая часть

13 Изолированные особые точки (ИОТ)

13.1 Изолированная особая точка

1. $f(z)$ аналитическая в точке $z_0 \Leftrightarrow f(z)$ дифференцируема в z_0 и $U(z_0)$
2. Определение 1: Точки, в которых $f(z)$ аналитическая, называются **правильными**.
3. Определение 2: Точки, в которых аналитичность нарушается, называются **особыми**.
4. Определение 3: Точка z_0 называется **изолированной особой точкой** функции $f(z)$, если существует такая её окрестность, во всех точках которой $f(z)$ регулярна, за исключением самой точки z_0.
5. Если z_0 правильная, то существует окрестность (круг K_r) такой, что $|z - z_0| < R$ внутри которого функция $f(z)$ аналитична и по теореме Тейлора разлагается в степенной ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.
6. Если z_0 изолированная особая точка, то функция аналитична в кольце $0 < |z - z_0| < R$ и по теореме Лорана раскладывается в ряд Лорана $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ (13.1).

13.2 Классификация изолированных особых точек по виду главной части ряда Лорана

13.2.1 Устранимые особые точки

1. Определение 4: z_0 называется **устранимой особой точкой** функции $f(z)$, если в ряде Лорана функции $f(z)$ (5.1) отсутствует главная часть, т.е. $f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + ...$ (13.2)
2. Пример 1: $f(z) = \frac{\sin z}{z}$
   (a) ИОТ $z_0 = 0$
   (b) $f(z) = \frac{1}{z}(z - \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} - ...) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - ...$
   (c) Точка z_0 — устранимая особая точка, так как отсутствует главная часть ряда Лорана

13.2.2 Полюс порядка k

1. Определение 5: Изолированная особая точка z_0 называется **полюсом порядка** k функции $f(z)$, если в разложении в ряд Лорана (5.1) главная часть имеет конечное число членов, причем k — наибольшая степень $(\frac{1}{z-z_0})$, входящая в разложение.
   (a) Если $k = 1$, полюс называется **простым**
   (b) Если $k > 1$, полюс называется **кратным**. П(k)
2. $f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{C_{-k+1}}{(z-z_0)^k} + ... + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + ...$ (13.3)
3. Пример 2: $f(z) = \frac{e^z-1}{z^2} = \frac{1}{z^2}(1 + z + \frac{z^2}{2!} + ... - 1) = \underline{\frac{1}{z}} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + ...$
   (a) Простой плюс ($k = 1$)
4. Пример 3: $f(z) = \frac{\cos(z-i)}{(z-i)^5} = \frac{1}{(z-i)^5}[1 - \frac{(z-i)^2}{2!} + \frac{(z-i)^4}{4!} - ...] =$
   $= \underline{\frac{1}{(z-i)^5}} - \frac{1}{(z-i)^3 2!} + \frac{1}{(z-i)4!} - \frac{(z-i)}{6!} + ...$
   (a) Полюс 5-го порядка

13.2.3 Существенно особая точка

1. Определение 6: z_0 — **существенно особая точка** функции $f(z)$, если главная часть ряда Лорана (5.1) имеет бесконечное число членов, т.е. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$.
2. Пример 4: $f(z) = e^{-\frac{z}{2}} = 1 - \frac{z}{2} + (\frac{z}{2})^2 \frac{1}{2!} - ...$; $z_0 = 0$ — СОТ
   (a) $f(z) = e^{-\frac{2}{z}} = 1 - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2!} - \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{2^3 3!} + ...$; $z_0 = 0$ — СОТ
3. Пример СОТ: $\sin\frac{1}{z-2}$; $\cos\frac{1}{z-5}$; $e^{\frac{1}{z-3}} - 1$

13.3 Поведение функции в окрестности изолированной особой точки

1. Теорема 1: Если z_0 — устранимая особая точка аналитической функции $f(z)$, то существует $\lim_{z \to z_0} f(z) = c_0$, $|c_0| < \infty$
   (a) $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1 < \infty \Longrightarrow z_0$ — устранимая особая точка
   (b) $f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & z \neq 0 \\ \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} & z = 0 \end{cases}$
2. Теорема 2: Если z_0 — полюс функции $f(z)$, то $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$
3. Теорема 3: Для того, чтобы $f(z)$ имела в точке $z = z_0$ полюс k-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности точки $z = z_0$ имело место равенство $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k}$, где $\varphi(z)$ — аналитическая в $U(z_0)$ и $\varphi(z_0) \neq 0$.

   (a) Следствие: Если $f(z)$ иммеет в точке z_0 полюс k-го порядка, то существует конечный предел $\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^k = c$; $c \neq 0, \infty$ (13.4), т.е. подобрав порядок множителя в (5.4) определим порядок полюса.

4. Пример 5: $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^5}$; $z_0 = 0$ — особая точка

   (a) $\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^5}(z-0)^k = \lim_{z\to 0} \frac{z^k \frac{z^2}{2}}{z^5} = \frac{1}{2}$ при $k = 3 \Rightarrow$ полюс порядка 3

13.4 Нули регулярной функции

1. Рассмотрим регулярную функцию $f(z)$ в круге $|z - z_0| < R$
2. Определение 7: Точка z_0 называется **нулем** функции $f(z)$, если $f(z_0) = 0$

   (a) $f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + ...$

   (b) $f(z_0) = 0 = c_0$

   (c) $f(z) = c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + ... = (z-z_0)(c_1 + c_2(z-z_0) + ...) =$
   $= (z-z_0)\varphi(z)$, $\varphi(z_0) \neq 0$

3. Вывод: Если z_0 — нуль функции $f(z)$, то $f(z) = (z-z_0)\varphi(z)$, $\varphi(z_0) \neq 0$

   (a) $f(z) = (z-z_0)^k\varphi(z)$, $\varphi(z_0) \neq 0 \Longrightarrow z_0$ — нуль кратности k функции $f(z)$

4. Теорема 4 (Сохоцкого): В сколь угодно малой окрестности существенно особой точки функция $f(z)$ принимает значения сколь угодно близкие к любому наперед заданному числу, конечному или бесконечному.
5. Определение 8: z_0 — нуль кратности k функции $f(z)$, если:

   (a) $f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(k-1)}(z_0) = 0$

   (b) $f^{(k)}(z_0) \neq 0$

6. Пример 4: $f(z) = \cos z - 1$; $z_0 = 0$

   (a) $f(z_0) = 0$

   (b) $f'(z_0) = -\sin z_0 = 0$

   (c) $f''(z_0) = -\cos z_0 = -1$

   (d) z_0 — нуль второго порядка

7. Теорема 6 (о связи между нулем и полюсом): Если функция $g(z)$ имеет в точке z_0 нуль порядка k, то функция обратная ей $f(z) = \frac{1}{g(z)}$ — имеет в z_0 полюс порядка k.
8. Пример 5: $\frac{1}{(z-3)^2 e^z}$; $z_0 = 3$

(a) $g(z) = e^z(z-3)^2$, z_0 — нуль порядка 3
(b) $f(z) = \frac{1}{g(z)}$, z_0 — полюс порядка 3

9. **Замечание:** Если $f(z)$ представлена в виде двух функций $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ и точка z_0 является для $P(z)$ — нулем m-го порядка и для $Q(z)$ — нулем n-го порядка, то:
   (a) $m = n \Rightarrow z_0$ — устранимая особая точка
   (b) $m > n \Rightarrow m - n$ — порядок нуля функции $f(z)$
   (c) $n > m \Rightarrow n - m$ — порядок полюса функции $f(z)$

10. Пример 6: найти особые точки и определить их порядок: $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^3(z-1)^5}$
    (a) $z_1 = 0$
        i. $P(z) = \cos z - 1$; $m = 2$
        ii. $Q(z) = z^3(z-1)^5$; $n = 3$
        iii. $z = 0$: Порядок полюса $f(z)$: $n - m = 3 - 2 = 1$
    (b) $z_2 = 1$
        i. $P(z)$: $m = 0$
        ii. $Q(z)$: $n = 5$
        iii. $z = 1$: Порядок полюса $f(z)$: $n - m = 5 - 0 = 5$

Часть XXV

Семинар 11 (03.12.15)

1. $(1+i)^i = e^{iLn(1+i)} = e^{i(\ln|1+i| + i(arg\, z + 2\pi n))}$
2. Основная теорема о вычетах: $\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \underset{z_k}{res}\, f(z)$
3. z_0 — полюс k-го порядка: $\underset{z_0}{res}\, f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[f(z)(z-z_0)^k]$
4. z_0 — простой полюс ($k = 1$): $\underset{z_0}{res}\, f(z) = \lim_{n \to z_0}[f(z)(z-z_0)]$
5. z_0 — простой полюс: $\underset{z_0}{res}\, f(z) = \frac{\varphi(z)}{\Psi'(z)}|_{z=z_0}$

Часть XXVI

Лекция 13 (04.12.15)

Подготовка к контрольной работе №2

Классификация особых точек

	по пределам	по Лорану
1. Устранимая о.т.	$\lim_{z\to z_0} f(z) = c(\neq 0, \infty)$	отсутствует главная часть
		$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - ...$
2. Полюс n-го порядка	$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$	конечное число слагаемых в главной части
	$\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^n = c(\neq 0, \infty)$	$\frac{1-\cos z}{z^5} = \frac{1}{z^3 \cdot 2!} - \frac{1}{z \cdot 4!} - \frac{z}{6!} + ...$ $n = 3$
3. Существенная о.т.	$\nexists \lim_{z\to z_0} f(z)$	бесконечное число слагаемых в главной части

Образец контрольной работы

1. Вычислить $(-3-3\sqrt{3})^{(1+2i)}$
2. Аналитичность: $f(z) = |z| + i\,Re(3z+2i) = \sqrt{x^2+y^2} + 3xi$
   (a) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial v}{\partial x} = 3$
   (b) $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$
   (c) Функция не является аналитичной
3. Тип особой точки и вычет:
   (a) $f(z) = \frac{\sin^2(z-5)}{(z-5)^2(z-1)^2}$
      i. $z_0 = 5$
         A. $P(z) = \sin^2(z-5)$; $P(5) = 0$
         $P'(z) = 2\sin(z-5)\cos(z-5)$; $P'(5) = 0$
         $P''(z) = 2\cos^2(z-5) - 2\sin^2(z-5)$; $P''(5) = 2 \neq 0$ - нуль второго порядка ($m = 2$)
         B. $Q(z) = (z-5)^2(z-1)^2$; $Q(5) = 0$
         $Q'(z) = 2(z-5)(z-1)^2 + 2(z-1)(z-5)^2$; $Q'(5) = 0$
         $Q''(z) = 2(z-1)^2 + 4(z-1)(z-5) + 2(z-5)^2 + 4(z-5)(z-1)$; $Q''(5) = 32 \neq 0$ - нуль второго порядка ($n = 2$)
         C. $m = n \Longrightarrow z_0 = 5$ - устранимая особая точка
         D. $\underset{z_0}{res} f(z) = 0$
      ii. $z_1 = 1$

A. $P(1) = \sin^2 4 \neq 0 - m = 0$

B. $Q(1) = 0$
$Q'(1) = 0$
$Q''(1) = 32 \neq 0 - n = 2$

C. $n > m \Longrightarrow z_1 = 1$ — полюс второго порядка

D. $\underset{z_1}{res} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{d^2}{dz^2}(\frac{\sin(z-5)}{(z-5)})^2 = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz} \frac{2\sin(z-5)}{(z-5)} \frac{\cos(z-5)(z-5)-\sin(z-5)}{(z-5)^2} = ...$

(b) $f(z) = \frac{2^{\frac{1}{z-3}}-1}{z-4}$

14 Вычеты. Основная теорема о вычетах

1. Рассматривается изолированная особая точка z_0 однозначной аналитической функции $f(z)$ в кольце $0 < |z - z_0| < R$.
2. $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ (14.1)
   (a) $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$
   (b) $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$ (14.3)
3. Определение 1: **Вычетом** аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке называется комплексное число, равное интегралу $\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$, взятому в положительном направлении по любому контуру, лежащему в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащему внутри себя единственную особую точку z_0 функции $f(z)$. Обозначается $\underset{z_0}{res} f(z)$ или выч$[f(z), z_0]$. $\underset{z_0}{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$ (14.2)
   (a) Замечание 1: Если z_0 — правильная, то интеграл в (14.2) равен 0 по интегральной теореме Коши.
   (b) Замечание 2: При сравнении (6.3) и (6.2), $\underset{z_0}{res} f(z) = c_{-1}$ (14.4)
4. Определение 2: **Вычетом** аналитической функции $f(z)$ изолированной особой точки называется коэффициент при $(z - z_0)^{-1}$ при разложении функции в ряд Лорана.
5. Теорема 1: Вычет в устранимой особой точке равен нулю.
   (a) Доказательство: в разложении в ряд Лорана отсутствует главная часть.
6. Теорема 2: Если z_0 — простой полюс функции $f(z)$, то $\underset{z_0}{res} f(z) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z - z_0)$ (14.5)
   (a) Пример 1: $f(z) = \frac{1}{z-z^2} = \frac{1}{z(1-z)}$
      i. $z_0 = 0$; $z_1 = 1$ — особые точки
         A. $z_0 = 0$; $Q(z) = z \cdot \varphi(z)$; $\varphi(z) = 1 - z|_0 = 1 \neq 0$ — простой полюс
         B. $z_1 = 1$; $Q(z) = (1 - z)\Psi(z)$; $\Psi(z) = z|_1 = 1 \neq 0$ — простой полюс
      ii. $\underset{0}{res} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1\cdot z}{z(1-z)} = 1$

iii. $\underset{1}{res} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{1(z-1)}{z(1-z)} = -1$

7. Теорема 3: Если функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 можно представить как $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$; $\psi(z_0) = 0$; $\psi'(z_0) \neq 0$, то z_0 — простой полюс. Тогда $\underset{z_0}{res} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$ (14.6)

   (a) Пример 2: $f(z) = \frac{z^4}{1+z^4}$

      i. $z^4 + 1 = 0$

         A. $z_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

         B. $z_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

      ii. $z_{1,2,3,4}$ — простые полюсы

      iii. $\underset{z_k}{res} f(z) = \frac{z^4}{4z^3}|_{z_k} = \frac{z_k}{4}$; $k = 1,2,3,4$

8. Теорема 4: Вычет в полюсе k-го порядка вычисляется по формуле
$\underset{z_0}{res} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[f(z)(z-z_0)^k]$ (14.7)

   (a) Доказательство:

      i. $f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + ... + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0) + ...$ умножим на $(z-z_0)^k$

      ii. $f(z)(z-z_0)^k = c_{-k} + ... + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} + c_0(z-z_0)^k + c_1(z-z_0)^{k+1} + ...$ продифференцируем $k-1$ раз

      iii. $\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(f(z)(z-z_0)^k) = (k-1)!c_{-1} + k!c_1(z-z_0) + ...$ устремляем $z \to z_0$

      iv. переходя к пределу получаем формулу (14.7)

   (b) Пример 3: $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z-\frac{\pi}{4})^3}$

      i. $z_0 = \frac{\pi}{4}$ — полюс третьего порядка

      ii. $\underset{\frac{\pi}{4}}{res} f(z) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{d^2}{dz^2}[\frac{\sin 2z}{(z-\frac{\pi}{4})^3} \cdot (z-\frac{\pi}{4})^3] = \frac{1}{2!} \lim_{z\to\frac{\pi}{4}}(-4\sin 2z) = \frac{-4}{2} = -2$

9. Пример 4: $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$

   (a) $z_0 = 1$ — существенная особая точка

   (b) $e^{\frac{1}{z-1}} = (1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + ...)$

   (c) $c_{-1} = 1 = \underset{1}{res} f(z)$

14.1 Основная теорема о вычетах

1. Теорема 5: (**основная теорема о вычетах**): Если функция $f(z)$ аналитична в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной Γ, везде, кроме конечного числа изолированных особых точек $z_1, ..., z_n$, лежащих в области D, то $\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \underset{z_k}{res} f(z)$ (14.8)

2. Пример 1: $\int_{|z-i|=2} \frac{1}{z(z-10)^3}dz = 2\pi i \underset{0}{res} f(z) = -\frac{2\pi i}{10^3}$

   (a) $z_0 = 0$ — простой полюс

   (b) $z_1 = 10$ — полюс 3 порядка, который не входит в область

   (c) $\underset{0}{res} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1\cdot z}{z(z-10)^3} = -\frac{1}{10^3}$

3. Пример 2: $\int_{|z|=2}(z-1)(\cos\frac{1}{z-1} - 1)dz = 2\pi i \underset{1}{res} f(z) = -\pi i$

   (a) $z_0 = 1$ — существенная особая точка

   (b) $f(z) = (z-1)(1 - \frac{1}{(z-1)^2 2!} + \frac{1}{(z-1)^4 4!} + ... - 1) = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}!}\cdot\frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^3}\cdot\frac{1}{4!} + ...$

Часть XXVII
Лекция 14 (11.12.15)

15 Приложение вычетов

15.1 Применение вычетов к вычислению несобственных интегралов от дроби

1. Теорема 1: Если $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x)$ — многочлены, причем все корни знаменателя комплексные и степень $Q(x)$ хотя-бы на две единицы больше степени $P(x)$ $(n - m \geq 2)$, тогда $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = 2\pi i \underset{z_k}{res} F(z)$

   (a) z_k — полюсы функции $F(z)$, лежащие в верхней полуплоскости $(Im\, z_k > 0)$

   (b) Доказательство:

      i. Строим контур $C = C_R \cup [-R, R]$

      ii. Основная теорема о вычетах: $\oint_C F(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \underset{z_k}{res} F(z)$

      iii. $\int_{-R}^R F(x)dx + \int_{C_R} F(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \underset{z_k}{res} F(z)$

2. Пример 1: Вычислить $\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}$

   (a) Подинтегральная функция четная $\Rightarrow \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}$

(b) Обозначим $F(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$
   i. $z_1 = ai$ — полюс второго порядка
      A. $\underset{ai}{res} F(z) = \lim_{z \to ai} \frac{d}{dz}[\frac{z^2}{(z+ai)^2}] = \lim_{z \to ai} \frac{2z(z+ai-z)}{(z+ai^3} = \frac{2aiai}{-8ia^3} = -\frac{i}{4a}$
      B. $\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} = 2\pi i(-\frac{i}{4a}) = \frac{\pi}{2a}$
   ii. $z_2 = -ai$ — не входит

3. Пример 2: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} = 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi i}{2i} = \frac{\pi}{2}$
   (a) $F(z) = \frac{1}{(z^2+2z+2)^2}$; $n = 4$; $m = 0 \Rightarrow n - m = 4$
   (b) $z^2 + 2z + 2 = 0$; $z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$
   (c) $\underset{-1+i}{res} F(z) = \lim_{z \to -1+i} \frac{d}{dz}[\frac{1}{(z+1+i)^2}] = \lim_{z \to -1+i} \frac{-2}{(z+1+i)^3} = \frac{-2}{8i^3} = \frac{1}{4i}$

Часть XXVIII

Консультация (14.01.16)

1. Взять с собой (без этого не пустят):
   (a) зачетка
   (b) допуск (для недопущенных)
   (c) сделанный типовой расчет (необязательно зачтенный)
      i. должен быть в тонкой тетради, либо на листах
      ii. отдельные листы скрепить и сделать обложку
   (d) тонкая тетрадь
      i. подписать: фамилия и номер группы
      ii. на обложке:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2. Рекомендации:
   (a) писать понятно
   (b) никаких черновиков
   (c) выключить телефон
3. Начало экзамена (для ИСБОп-01-14 и некоторых других): **9:00**

   (a) Следующие приходят в 11:00, значит экзамен длится 2 часа

4. 15 января действуют "бонусы", т.е. время написания: **1.5 часа**

   (a) 30 января (переэкзаминовка): билет будет сокращен, т.е. время написания 1 час

5. Бонусы:

   (a) зачтенные контрольные работы + типовой расчет: 3 балла + 1 балл в честь рождества :D
      i. "3" — безусловно
      ii. "4" — автомат
      iii. "5" — 2 дополнительные задачи (усложненные) на 30 минут, рискуя автоматом "4"

   (b) зачтена первая контрольная (ряды)
      i. "3" — 2 решенные задачи из ТФКП
      ii. "4" — 1 задача по рядам + 4 по ТФКП
      iii. "5" — весь билет

   (c) зачтена вторая контрольная
      i. "3" — 2 решенные задачи из рядов
      ii. "4" — 1 задача из ТФКП + 4 задачи из рядов
      iii. "5" — весь билет

   (d) зачтена первая и вторая контрольные работы и не зачтен типовой расчет
      i. дополнительная задача и дальше см. пункт (a)

6. Образец билета:

   (a) Исследовать на сходимость (абсолютную и условную) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{2\pi}{2n+1}$
      i. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{2\pi}{2n+1}$
      ii. Сравним с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ — ряд Дирихле с $n = \frac{3}{2}$ (сходится)
      iii. $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{2\pi}{2n+1})/\frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{2\pi}{2} = \pi$
      iv. Вывод: исходный ряд сходится абсолютно

   (b) Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(\frac{n}{3n-1})^{2n}$
      i. По радикальному признаку Коши $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} =$
      $= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}(\frac{n}{3n-1})^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n}}(\frac{n}{3n-1})^2 = \frac{1}{9} < 1 \Longrightarrow$ ряд сходится
      ii. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln n^{\frac{1}{n}}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = e^0 = 1$

   (c) Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n+3}$

i. По признаку Даламбера $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}+3}\cdot\frac{2^n+3}{(2n)!} =$
$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)2^n(1+\frac{3}{2^n})}{(2n)!2^n(2+\frac{3}{2^n})} = \infty \Longrightarrow$ ряд расходится

(d) Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^n}{(n+2)\ln(n+2)}$

i. **Нельзя:** использовать признаки абсолютной сходимости не поставив модуль

ii. По признаку Даламбера: $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty}|\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+3)\ln(n+3)}\frac{(n+2)\ln(n+2)}{(x+1)^n}| =$
$= |x+1|\lim_{n\to\infty}|\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+3)}| = |x+1|\lim_{n\to\infty}|\frac{n+3}{n+2}| = |x+1| < 1$

iii. $R_{\text{сх}} = 1$; Область сходимости: $(-2;0)$

iv. При $x=0$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)\ln(n+2)}$

A. $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$ *

B. По интегральному признаку Коши: $\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+2)\ln(x+2)} = \lim_{b\to\infty}\ln(\ln(x+2))|_1^b = \infty - \ln(\ln 3) = \infty \Rightarrow$ абсолютной сходимости нет

C. Проверим признак Лейбница:

D. $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)} = 0$

E. $|a_n| > |a_{n+1}|$: $|\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}| > |\frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}|$; $n+2 < n+3$; $\frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+3}$; $\ln(n+2) < \ln(n+3)$; $\frac{1}{\ln(n+2)} > \frac{1}{\ln(n+3)} \Longrightarrow$ ряд сходится условно

v. При $x=-2$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{(n+2)\ln(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$

A. Ряд расходится как ряд *

vi. Ответ: $R_{\text{сх}} = 1$; Область сходимости: $x\in(-2;0]$

(e) Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$ функцию $f(x) = \ln(6x+1)$

i. $t = x-1$; $x = t+1$

ii. $f(t) = \ln(6(t+1)+1) = \ln(6t+7) = \ln 7 + \ln(1+\frac{6}{7}t) = \ln 7 + \frac{6}{7}t - (\frac{6}{7})^2\frac{t^2}{2} + ... =$
$= \ln 7 + \frac{6}{7}(x-1) + (\frac{6}{7})^2\frac{(x-1)^2}{2} + (\frac{6}{7})^3\frac{(x-1)^3}{3}$

iii. Область сходимости: $(-\frac{1}{6}; 2\frac{1}{6}]$

(f) Решить уравнение $\cos 4z = 2$

i. $\frac{e^{i4z}+e^{-i4z}}{2} = 2$

ii. $t = e^{i4z}$; $t + \frac{1}{t} = 4$

iii. $t^2 - 4t + 1 = 0$; $t = 2\pm\sqrt{3}$

iv. $e^{i4z} = 2+\sqrt{3}$

v. $i4z = Ln(2+\sqrt{3}) = \ln|2+\sqrt{3}| + i(arg(2+\sqrt{3}) + 2\pi k) = \ln(2+\sqrt{3}) + i2\pi k$

vi. $z = \frac{2\pi k}{4} - i\frac{\ln(2\pm\sqrt{3})}{4}$

(g) Указать особые точки и их тип. Найти вычеты в особых точках.

i. $f(z) = (z+2)\sin\frac{4}{z+2} = (z+2)(\frac{4}{z+2} - \frac{4^3}{(z+2)^3 3!} - ...) = 4 - \frac{4^3}{(z+3)^2 3!} + ...$

   ii. Бесконечное количество членов в главной части $\Rightarrow z = -2$ — существенно особая точка; $\underset{z=-2}{res} f(z) = 0$

(h) Вычислить $\int_{|z|=3} \frac{e^z-1}{z(z^2+1)} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{res} f(z)$

   i. Рисунок обязательно
   ii. $z_1 = 0$; входит в область; устранимая особая точка
      A. $\lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z(z^2+1)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z^2+1} = 1 \neq 0$ — верно
      B. $\underset{z_1=0}{res} f(z) = 0$
   iii. $z_2 = i$; входит в область; полюс первого порядка
      A. Подберем степень $(z-i)$: $\lim_{z\to i} \frac{e^z-1}{z(z+i)(z-i)}(z-i) = \lim_{z\to i} \frac{e^z-1}{z(z+i)} = -\frac{e^i-1}{2} \neq \infty$ — верно
      B. $\underset{z_2=i}{res} f(z) = -\frac{e^i-1}{2}$
   iv. $z_3 = -i$; входит в область; полюс первого порядка
      A. Подберем степень $(z+i)$: $\lim_{z\to -i} \frac{e^z-1}{z(z+i)(z-i)}(z+i) = \lim_{z\to -i} \frac{e^z-1}{z(z-i)} = \frac{e^{-i}-1}{2} \neq \infty$ — верно
      B. $\underset{z_3=-i}{res} f(z) = \frac{e^{-i}-1}{2}$
   v. $\int_{|z|=3} \frac{e^z-1}{z(z^2+1)} dz = 2\pi i(0 - \frac{e^i-1}{2} + \frac{e^{-i}-1}{2}) = 2\pi i(1-\cos 1)$

(i) Вычислить несобственный интеграл $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+16} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+16}$

   i. $F(z) = \frac{1}{z^2+16}$
   ii. $z_1 = -4i$; полюс первого порядка; не входит в область
   iii. $z_2 = 4i$; полюс первого порядка; входит в область
   iv. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+16} = \frac{1}{2} 2\pi i \cdot \underset{z_1=4i}{res} F(z) = \pi i \cdot \lim_{z\to\infty} \frac{(z-4i)}{(z-4i)(z+4i)} = \frac{\pi i}{8i} = \frac{\pi}{8}$

(j) Проверить на аналитичность функцию $f(z) = e^{6z} = e^{6(x+iy)} = e^{6x}(\cos 6y + i\sin 6y)$

   i. $u(x,y) = e^{6x}\cos 6y$
   ii. $v(x,y) = e^{6x}\sin 6y$
   iii. $\frac{\partial u}{\partial x} = 6e^{6x}\cos 6y$; $\frac{\partial v}{\partial y} = 6e^{6x}\cos 6y$ — выполнено
   iv. $\frac{\partial u}{\partial y} = -6e^{6x}\sin 6y$; $\frac{\partial v}{\partial x} = 6e^{6x}\sin 6y$ — выполнено
   v. Ответ: функция является аналитичной на всей числовой оси

7. Необходимые баллы:

   (a) 6-7 — “3”
   (b) 7.5-8.5 — “4”
   (c) >8.5 — “5”
   (d) Обязательно сделать 2 задачи из каждой темы