Часть I

Семинар 1 (2.09.15)

Преподаватель: Миронинко Елена Сергеевна

План семестра

1. Две контрольных работы
   (a) Контрольная работа 1
      i. Дифференциальные уравнения первого порядка (? задач)
      ii. Дифференциальные уравнения, допускающие понижения (2 задачи)
   (b) Контрольная работа 2
      i. Линейные дифференциальные уравнения (7 задач)
      ii. Операционные исчисления (6 задач). Преобразования Лапласа.
2. Типовой расчет
3. Экзамен

Шпаргалки

Шпаргалка 1

1. Свойства и преобразования Лапласа
2. Таблица оригиналов и изображений

Оригиналы	Изображения
1	$\frac{1}{p}$

Шпаргалка 2 - Таблица интегралов и дифференциалов. <u>К следующей паре</u>.

$f(x)$	$(f(x))'$	$\int f(x) + C$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
a^x	$a^x \ln a$	$\frac{a^x}{\ln a}$
e^x	e^x	e^x
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} u$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} u$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	
$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh} x}$	

$f(x)$	$(f(x))'$	$\int f(x)$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

$f(x)$	$\int f(x)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2+a}\rvert$
$\frac{1}{a^2-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\lvert\frac{a+x}{a-x}\rvert$
$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{x-a}{x+a}\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$
$\frac{1}{a^2+b^2x^2}$	$\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}$

Шпаргалка 3 - Некоторые интегрируемые типы д.у. первого и второго порядков

Вид диф. уравнения	Метод решения
Уравнение с разд. перем. $y' = f_1(x)f_2(y)$	$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C,\ f_2(y) \neq 0$
Уравнение с одн. правой частью $y' = f(\frac{y}{x})$	$y = xu;\ y' = u + xu'$
Линейное уравнение $y' + P(x)y = Q(x)$	$y = uv$ $y' = u'v + uv'$ $\begin{cases} v' + P(x)v = 0 & \text{частное} \\ vu' = Q(x) & \text{общее} \end{cases}$
Уравнение Бернулли $y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^\alpha; \alpha \neq 0, 1$	$y = uv$ $y' = u'v + uv'$ $\begin{cases} v' + P(x)v = 0 & \text{частное} \\ u' = Q(x)u^\alpha v^{\alpha-1} & \text{общее} \end{cases}$
Уравнение в полных дифференциалах $P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0; \frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$	
(отсутствует x) $F(y;y';y'') = 0$	$y' = p(y)$ $y'' = p(y)p'(y)$
(отсутсвует y) $F(x;y';y'') = 0$	$y' = p(x)$ $y'' = p'(x)$

Дифференциальное уравнение

Порядок д.у.	1	2	3
Д.у.	$y' = 2$	$y'' = 2$ $y' = 2x + c_1$	$y''' = 6$ $y'' = 6x + c_1$ $y' = 3x^2 + c_1x + c_2$
Частное решение	$y = 2x$	$y = x^2$	$y = x^3$
Общее решение	$y = 2x + c_1$	$y = x^2 + c_1x + c_2$	$y = x^3 + \frac{c_1x^2}{2} + c_2x + c_3$
c_1, c_2, c_3 - произвольные постоянные			

Домашнее задание

1. Шпаргалка 2
2. 1.1,2,3,4,6
   (a) 1.1 (10): $(1 + \cos x)yy' = (y^2 + 1)\sin x$
      i. $\int \frac{y}{y^2+1}dy = \int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$
         A. $\int \frac{y}{y^2+1}dy = \left| \begin{matrix} u = y^2 + 1 \\ du = 2y \cdot dy \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln(y^2 + 1)$
         B. $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = \left| \begin{matrix} u = 1 + \cos x \\ du = -\sin x \cdot dx \end{matrix} \right| = -\int \frac{du}{u} = -\ln(1 + \cos x)$
      ii. $\frac{1}{2}\ln(y^2 + 1) + \ln(1 + \cos x) = 0$
      iii. $\frac{1}{2}\ln((y^2 + 1)(1 + \cos x)^2) = 0$
      iv. $(y^2 + 1)(1 + \cos x)^2 = 1$
      v. $y^2 + 1 = \frac{1}{(1+\cos x)^2}$
      vi. $y^2 = \frac{1}{(1+\cos x)^2} - 1$
      vii. $y = \sqrt{\frac{1}{(1+\cos x)^2} - 1}$
   (b) 1.2 (10): $x \cdot dy = (y - 2\sqrt{x^2 - y^2})dx$

i. $\frac{dy}{dx} = y' = \frac{y-2\sqrt{x^2-y^2}}{x}$
ii. $z = \frac{y}{x}$; $y = zx$; $y' = z'x + z$
iii. $z'x + z = \frac{zx-2\sqrt{x^2-z^2x^2}}{x}$
iv. $z'x + z = \frac{zx-2x\sqrt{1-z^2}}{x}$
v. $z'x + z = z - 2\sqrt{1-z^2}$
vi. $z'x = \frac{x \cdot dz}{dx} = -2\sqrt{1-z^2}$
vii. $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -2\int \frac{dx}{x}$
   A. $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z$
viii. $\arcsin \frac{y}{x} = -2\ln x$
ix. $\frac{y}{x} = -x\sin(2\ln x)$

Часть II

Лекция 1 (2.09.15)

Преподаватель: Руденская Ирина Николаевна

1. Учебники
   (a) Краснов, Киселев - “Вся высшая математика”
   (b) Письменный Д. - “Курс лекций по высшей математике”
   (c) Понтрягин - “Дифференциальные уравнения”
2. Задачники
   (a) Ефимов, Поспелов - “Сборник задач по высшей математике”
   (b) Филиппов - “Сборник задач по дифференциальным уравнениям”
   (c) Типовой расчет

1 Дифференциальное уравнение

1. $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ - дифференциальное уравнение.
   (a) x - переменная
   (b) y - функция от x
2. **Обыкновенные** дифференциальные содержат обыкновенные производные (не частные)
3. **Порядком** дифференциального уравнения называется порядок наивысшей входящей в него производной.
   (a) $F(x, y, y') = 0$ - уравнение 1 порядка
   (b) $F(x, y, y', y''') = 0$ - уравнение 3 порядка
4. $F(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) = 0$
   (a) $x(t), y(t)$ - функции
   (b) $\dot{x} = \frac{dx}{dt}; \dot{y} = \frac{dy}{dt}$
5. Определение: Задачей решения дифференциальных уравнений является нахождение функции $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

1.1 Геометрические задачи, приводящие к д.у.

1. Найти кривую, проходящую через точку $A(0;1)$, у которой площадь треугольника $S_{PMN} = const = a$.
   (a) $S_{\Delta PMN} = \frac{1}{2} \cdot y \cdot |PM|$
   (b) $\frac{1}{2}y|yy'| = a$ - д.у. 1 порядка
   (c) $\frac{1}{2}y^2y' = a$, где a - любое число
   (d) $\frac{1}{2}y^2\frac{dy}{dx} = a$ - уравнение с разделяющимися переменными
   (e) $y^2dx = 2adx$
   (f) $\int y^2dx = 2\int adx$
   (g) $\frac{y^3}{3} = 2ax + C$
   (h) $y = \sqrt[3]{6ax + \tilde{C}}$
   (i) $x = 0; y = 1 \Longrightarrow \tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{1}$

2. Задача непрерывного роста (убывания) вещества.
   (a) Дано:
      i. P - количество вещества. $P(0) = P_1$
      ii. Скорость роста (убывания) вещества пропорциональна его количеству. $\frac{dP}{dt} = \pm kP$
   (b) Найти:
      i. Зависимость количества вещества от времени $P(t)-?$
   (c) Решение:
      i. $\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \pm kP \quad k > 0 \\ P(0) = P_1 \end{cases}$
      ii. $\int \frac{dP}{P} = \pm k \int dt$
      iii. $\ln P = \pm kt + C$
      iv. $P = e^{\pm kt + \tilde{C}} P = \tilde{C}e^{\pm kt}$; $\tilde{C} > 0$
      v. $P(t) = P_1 e^{\pm kt}$

3. Задача об охлаждении тела
   (a) Пусть:
      i. T - температура тела
      ii. T_0 - температура окружения
      iii. $T(0) = T_1$; $T > T_0$
   (b) Найти:
      i. Зависимость температуры тела от времени
      ii. Выписать дифференциальное уравнение
   (c) Решение:
      i. $\Delta Q = -k(T - T_0)\Delta t$; $dQ = -k(T - T_0)dt$
      ii. $Q = mc(T - T_0)$; $dQ = mcdt$
      iii. $mcdt = -k(T - T_0)dt$
      iv. $\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -\frac{k}{mc}(T - T_0) \\ T(0) = T_1 \end{cases}$

1.2 Дифференциальное уравнение первого порядка

1. $F(x, y, y') = 0$ - общий вид
   (a) x - переменная
   (b) $y(x)$ - функция
   (c) $y' = \frac{dy}{dx}$
2. Определение: Функция $y = \varphi(x)$, определенная на отрезке $-\infty < x_1 < x < x_2 \leq +\infty$, называется решением дифференциального уравнения, если при подстановке в это дифференциальное уравнение, уравнение обращается в тождество на всей области определения.
   (a) Замечание: Чтобы уравнение имело решение, проиводная должна существовать во всех точках.
3. $y' = f(x, y)$ - уравнение, разрешенное относительно производной.
   (a) Пусть:
      i. $f(x, y)$ определена в некоторой области D.
   (b) Тогда:
      i. Решением этого уравнения будет кривая, которая целиком находится в области D и в каждой точке имеет касательную. Эта кривая называется **интегральной кривой**.
4. Определение: Общими решением дифференциального уравнения (3) является множество функций $y = \varphi(x, c)$ при каждом фиксированном $c = c_0$.
   (a) $y = \varphi(x, c_0)$ - частное решение
5. Задача Коши дифференциального уравнения 1 порядка
   (a) Пусть:
      i. $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
   (b) Тогда:
      i. Задача Коши заключается в нахождении решения уравнения, отвечающего заданному начальному условию.
6. Теорема существования и единственности решения задач Коши дифференциального уравнения 1 порядка
   (a) Пусть:
      i. $f(x, y)$ и $\frac{df}{dy}$ непрерывны в области D
      ii. $M_0(x_0, y_0) \in D$
   (b) Тогда:
      i. Найдется окрестность точки x_0 $[x_0 - d, x_0 + d]$, на которой существует и единственно решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$.
      ii. Геометрически, из множества интегральных кривых мы находим единственную, проходящую через заданную точку.
   (c) Пример:
      i. $\begin{cases} y' = 2x \\ y(0) = 0 \end{cases}$
      ii. $\frac{dy}{dx} = 2x$
      iii. $\int dy = \int 2x dx$

iv. $y = x^2 + C$ - общее решение д.у.
v. $x = 0, y = 0 \Longrightarrow c = 0$
vi. $y = x^2$

7. Дифференциальное уравнение однопараметрического семейства кривых
   (a) $\begin{cases} \Phi(x,y,c) = 0 \\ \Phi'(x,y,y',c) = 0 \end{cases}$ - семейство кривых. c - параметр..
   (b) $y = \frac{c}{x}$, $c \neq 0 \Rightarrow c = xy$
   (c) $y' = -\frac{c}{x^2}$, $y' = -\frac{xy}{x^2} \Rightarrow y' = -\frac{y}{x}$
8. Задача об ортогональных траекториях
   (a) Пусть:
      i. S_1, S_2 - семейства кривых
      ii. S_1 ортогонально S_2
   (b) Тогда:
      i. Семейство S_1 ортогонально S_2, если для любой кривой из S_1 существует ортогональная ей кривая из S_2, какую бы точку на кривой мы не взяли.
      ii. S_1: $y' = f(x,y)$
      iii. S_2: $y' = -\frac{1}{f(x,y)}$
   (c) Пример:
      i. Найти ортогональное семейство к семейству парабол $y = Cx^2$
         A. $y' = 2cx$
         B. $C = \frac{y}{x^2}$
         C. $y' = \frac{2y \cdot x}{x^2}$
         D. $y' = \frac{2y}{x}$
         E. S_2: $y' = -\frac{x}{2y}$
         F. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$; $\int 2y dy = -\int x dx$
         G. $y^2 = -\frac{x^2}{2} + C$
         H. $\frac{x^2}{2} + y^2 = C$

Часть III

Семинар 2 (9.09.15)

Примеры

1. $(e^x + y)dx + (x + 2y\cos y^2)dy = 0$
   (a) $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$
   $\frac{dP}{dy} \equiv \frac{dQ}{dx}$
   (b) $P(x,y) = e^x + y$
   $Q(x,y) = x + 2y\cos y^2$
   (c) $\frac{dP}{dy} = 1$
   $\frac{dQ}{dx} = 1$
   (d) $1 = 1 \Longrightarrow$ уравнение в полных дифференциалах
   (e) $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$

i. $du = 0 \Rightarrow P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

ii. $P = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x + y$
$Q = \frac{\partial u}{\partial y} = x + 2y\cos y^2$

iii. $u = \int(e^x + y)dx + c_1(y) = e^x + xy + c_1(y)$
$u = \int(x + 2y\cos y^2)dy + c_2(x) = xy + \sin(y^2) + c_2(x)$

iv. $c_1(y) = \sin(y^2)$
$c_2(x) = e^x$

v. $u = e^x + xy + \sin(y^2)$

(f) $e^x + xy + \sin(y^2) = c$

2. $x^2 + (1 + x^6)\sqrt{2y-1} \cdot y' = 0$; $y(0) = 1$

3. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$; $y(1) = 2$ - с однородной правой частью

4. $xy' + y = 3xe^{-x}$ - линейное уравнение

(a) $y' + \frac{1}{x} \cdot y = 3e^{-x}$

(b) $y(x) = u(x)v(x)$; $y' = u'v + uv'$

(c) $u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = 3e^{-x}$

i. $uv' + \frac{1}{x}uv = 0$

ii. $v' + \frac{1}{x}v = 0$ - частное решение

iii. $u'v = 3e^{-x}$ - общее решение

(d) $u' = \frac{du}{dx}$
$v' = \frac{dv}{dx}$

i. Частное решение:

A. $\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = 0$

B. $\frac{1}{x}v = -\frac{dv}{dx}$; $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$ - с разделенными переменными

C. $\ln v + c_1 = -\ln x + c_2$; $c_{1,2} = 0$, т.к. частное решение

D. $v = \frac{1}{x}$ - **частное решение**

ii. Общее решение:

A. $\frac{du}{dx}v = 3e^{-x}$

B. $v \cdot du = 3e^{-x}dx$

C. $v = \frac{1}{x}$; $\frac{1}{x}du = 3e^{-x}dx$

D. $du = 3x \cdot e^{-x}dx$

E. $u = 3\int x \cdot e^{-x}dx = 3\begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{vmatrix} =$
$= -3x \cdot e^{-x} + 3\int e^{-x}dx = -3x \cdot e^{-x} - 3e^{-x} + c$

F. $y = uv = \frac{1}{x}(-3x \cdot e^{-x} - 3e^{-x}) + c = -\frac{e^{-x}}{x}(3x+1) + c$ - **общее решение**

(e) Задача Коши

i. $A(0;1)$ - точка разрыва $\Rightarrow$ через эту точку не проходит ни одна интегральная кривая

ii. $B(1;0)$

A. $0 = 1(-3e^{-1} - 3e^{-1} + c)$

B. $c = 6e^{-1}$

C. $y = \frac{1}{x}(-3x \cdot e^{-x} - 3e^{-x} + 6e^{-1})$ проходит через точку $B(1;0)$

5. $(y - 3x^2 + 1)dx + (x + \ln y)dy = 0$

6. $y^3dx + (x^3\ln y - xy^2)dy = 0$

7. $x \cdot dy = (x^5y^2 - 2y)dx$

Часть IV

Лекция 2 (9.09.15)

1.3 Методы решения дифференциальных уравнений первого порядка

1.3.1 Уравнения с разделяющимися переменными

1. $y' = f(x) \cdot g(y)$
   (a) $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$
   (b) $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \ (g(y) \neq 0)$
   (c) $\varphi(y) = \psi(x) + C$ - общий **интеграл** д.у.
   (d) Проверка потери решения$g(y) = 0$
2. $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$
   (a) $\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy \ (f_2(x), g_1(y) \neq 0)$
   (b) $\varphi(x) + C = \psi(y)$ - общий **интеграл** д.у.
   (c) Проверка потери решения $f_2(x) = 0$; $g_1(y) = 0$
3. Примеры:
   (a) $\sqrt{1-x^2}dy + xydx = 0$
      i. $\sqrt{1-x^2}dy = -xydx$
      ii. $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
      iii. $\ln|y| = \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx$
      iv. $\ln|y| = \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{8}} + C$
      v. $\ln|y| = \sqrt{1-x^2} + C$
      vi. $|y| = e^{\sqrt{1-x^2}+C}$
      vii. $y = \tilde{C}e^{\sqrt{1-x^2}}$ ($\tilde{c}$ - любое число) - общее **решение** д.у.
      viii. Проверка потери решения:
         A. $y = 0$: $\sqrt{1-x^2} \cdot 0 + 0 \cdot x \cdot dx = 0 \Longrightarrow y = 0$ - потерянное решение (входит в общее решение)
         B. $1 - x^2 = 0$; $x = \pm 1$: $\sqrt{1}dy + 0 \cdot y = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$ - потерянное решение
      ix. Ответ: $\begin{cases} y = Ce^{\sqrt{1-x^2}} \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$
   (b) $xy^2 - x + (x+1)y' = 0$
      i. $x(y^2 - 1) = -(x+1)\frac{dy}{dx}$
      ii. $\int \frac{x \cdot dx}{x+1} = -\int \frac{dy}{y^2-1}$
         A. $\int \frac{x+1-1}{x+1}dx = \int (1 - \frac{1}{x+1})dx = x - \ln|x+1| + C$
      iii. $x - \ln|x+1| + \ln C = -\ln|\frac{y-1}{y+1}|$
      iv. $\frac{y-1}{y+1} = \tilde{C}(x+1)e^{-x}$
      v. $y = \frac{1+\tilde{C}(x+1)e^{-x}}{1-\tilde{C}(x+1)e^{-x}}$ - общее **решение** д.у.
      vi. Проверка потери решения:
         A. $x + 1 = 0$; $x = -1$: не является решением
         B. $y^2 - 1 = 0$; $y = \pm 1$: потерянное решение
         C. $y = 1$ входит в общее решение
         D. $y = -1$ не входит в общее решение
      vii. Ответ: $\begin{cases} y = \frac{1+\tilde{C}(x+1)e^{-x}}{1-\tilde{C}(x+1)e^{-x}} \\ y = -1 \end{cases}$

1.3.2 Однородные дифференциальные уравнения первого порядка (дифференциальные уравнения с однородной правой частью)

1. $y' = f(\frac{y}{x})$ или $y' = f(\frac{x}{y})$
   (a) Замена: $\frac{y}{x} = t \Rightarrow y = xt$
   (b) $y' = t + xt'$
   (c) $t + xt' = f(t)$
   (d) $x\frac{dt}{dx} = f(t) - t$
   (e) $\int \frac{dt}{f(t)-t} = \int \frac{dx}{x}$
   (f) Проверка потери решения

2. Определение: Функция $\varphi(x, y)$ называется **однородной** порядка n, если $\forall\lambda, \varphi(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n \varphi(x, y)$

3. Если в уравнении $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ (1) функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ - однородные функции одного порядка, то (1) сводится к однородному уравнению типа 1.

4. Примеры:
   (a) $xy' = \frac{3y^3+14x^2y}{2y^2+7x^2}$; $y(1) = 3$
      i. $y' = \frac{3y^3+14x^2y}{2xy^2+7x^3}$
      ii. $N(x, y) = 3y^3 + 14x^2y$
      $N(\lambda x, \lambda y) = 3\lambda^3y^3 + 14\lambda^2x^2\lambda y = \lambda^3N(x, y) \Rightarrow$ однородная функция 3 порядка
      $M(x, y) = 2xy^2 + 7x^3$
      $M(\lambda x, \lambda y) = 2\lambda x\lambda^2y^2 + 7\lambda^3x^3 = \lambda^3M(x, y) \Rightarrow$ однородная функция 3 порядка
      iii. $y' = \frac{3(\frac{y}{x})^3+14\frac{y}{x}}{2(\frac{y}{x})^2+7}$
      iv. $\frac{y}{x} = t$; $y' = t + xt'$
      v. $t + xt' = \frac{3t^3+14t}{2t^2+7}$
      vi. $xt' = \frac{3t^3+14t-2t^3-7t}{2t^2+7t}$
      vii. $x\frac{dt}{dx} = \frac{t^3+7t}{2t^2+7}$
      viii. $\int \frac{2t^2+7}{t^3+7t}dt = \int \frac{dx}{x}$
         A. $\int \frac{2t^2+7}{t^2+7t}dt = \int \frac{3t^2+7-t^2}{t^3+7t}dt = \int \frac{d(t^3+7t)}{t^3+7t} - \int \frac{t}{t^2+7}dt =$
         $= \ln|t^3 + 7t| - \frac{1}{2}\ln|t^2 + 7| + C$
      ix. $\ln|t^3 + 7t| - \frac{1}{2}\ln|t^2 + 7| = \ln|x| + \ln C$
      x. $\ln|\frac{t^3+7t}{\sqrt{t^2+7}}| = \ln|cx|$
      xi. $t\sqrt{t^2 + 7} = cx$
      xii. $\frac{y}{x}\sqrt{(\frac{y}{x})^2 + 7} = cx$
      xiii. $y\sqrt{y^2 + 7x^2} = cx^3$ - общий **интеграл** уравнения
      xiv. Задача Коши: $x = 1$; $y = 3$: $3\sqrt{9 + 7} = c$; $c = 12$
      xv. Ответ: $y\sqrt{y^2 + 7x^2} = 12x^3$
      xvi. В задаче Коши потерю решений не проверяем.
   (b) Определить форму зеркала, отражающего все лучи, исходящие из данной точки параллельно данному направлению.
      i. $\operatorname{tg}\alpha = y' = \frac{|NP|}{|KP|} = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$
      ii. $y' = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$
      iii. $x' = \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$
      iv. $x' = \frac{x}{y} + \sqrt{(\frac{x}{y})^2 + 1}$

v. Замена: $y = \frac{x}{y} \Rightarrow x = yt$
vi. $x' = t + yt'$
vii. $t + yt' = t + \sqrt{t^2+1}$
viii. $y\frac{dt}{dy} = \sqrt{t^2+1}$
ix. $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{dy}{y}$
x. $\ln|t + \sqrt{t^2+1}| = \ln|y| + \ln C$
xi. $t + \sqrt{t^2+1} = Cy$
xii. $t^2 + 1 = (Cy - t)^2$
xiii. $1 = C^2y^2 - 2Cyt$
xiv. $1 = C^2y^2 - 2cx$
xv. $y^2 = \frac{2}{C}x + \frac{1}{C^2}$
xvi. $y^2 = 2\tilde{C}x + \tilde{C}^2$
xvii. Проверка потери решений:
   A. $t^2 + 1 = 0$: не является решением
   B. $y = 0$: потерянное решение (входит в общее)

5. Уравнения, сводящиеся к однородным

   (a) $y' = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$; $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$; $t = a_1x + b_1y + c_1$

   i. $(2x + y + 2)dx + (4x + 2y + 9)dy = 0$; $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$
      A. $2x + y + 2 = t$; $2dx + dy = dt \Rightarrow dy = dt - 2dx$
      B. $t \cdot dx + (2t + 5)(dt - 2dx)$
      C. $(2t + 5)dt = 5(t + 2)dx$
      D. $\frac{1}{5}\int \frac{2t+5}{t+2}dt = \int dx$
      E. $\frac{1}{5}\int(2 + \frac{1}{t+2})dt = \int dx$
      F. $2t + \ln|t + 2| = 5x + C$
      G. $5x - 2t = \ln C|t + 2| \Rightarrow C(t + 2) = e^{5x-2t}$
      H. $t + 2 = \tilde{C}e^{5x-2}$
      I. $2x + y + 4 = \tilde{C}e^{x-2y-4}$
      J. $y = \tilde{C}e^{x-2y-4} - 2x - 4$
      K. Проверка потери решения: $2x+y+4 = 0$; $2x+y = -4$: потерянное решение (входит в общее)

   (b) $y' = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$; $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$; $\begin{matrix} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{matrix}$

   i. $(x + y + 1)dx + (x - y + 3)dy = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$
      A. $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$; $(-2; 1)$ - точка пересечения прямых
      B. $du = dx$
         $dv = dy$
      C. $x = u - 2$
         $y = v + 1$
      D. $(u + v)du + (u - v)dv = 0$
      E. $t = \frac{u}{v} \Rightarrow u = vt$
      F. $du = vdt + tdv$
      G. $v(t + 1)(vdt + tdv) + v(t - 1)dv = 0$
      H. $v = 0 \Rightarrow u = 0$: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$ - решение

I. $(t+1)(vdt+tdv)+(t-1)dv=0$
J. $v(t+1)dt=-(t^2+2t-1)dv$
K. $\int\frac{dv}{v}=\int\frac{(t+1)dt}{t^2+2t-1}$
L. $\ln|v|=-\frac{1}{2}\ln|t^2+2t-1|+\ln C$
M. $v=\frac{C}{\sqrt{t^2+2t-1}}$
N. $(x+y+1)dx+(x-y+3)dy=0$
O. $(x+2)^2+2(x+2)(y-1)-(y-1)^2=C$

Часть V

Семинар 3 (16.09.15)

Примеры

1. $y\cdot e^x dy+x\cdot e^{y^2}dx=0$
2. $xy'=y(1+\ln y(x))$; $y(1)=e$
3. $y'+y\operatorname{tg}x=e^x\cos x$; $y(0)=2$
4. $y'=y^4\cos x+y\cdot\operatorname{tg}x$
   (a) $y'+(-\operatorname{tg}x)y=(\cos x)\cdot y^4$
   (b) $y=u(x)v(x)$; $y'=u'v+v'u$
   (c) $u'v+v'u+(-\operatorname{tg}x)\cdot uv=u^4v^4\cos x$
      i. $v'u+(-\operatorname{tg}x)\cdot uv=0$
      ii. $u'v=u^4v^4\cos x$
      iii. $u'=u^4v^3\cos x$
   (d) $\begin{cases}v'u+(-\operatorname{tg}x)\cdot uv=0 & \text{−частное}\\ u'=u^4v^3\cos x & \text{−общее}\end{cases}$
      i. $v'u+(-\operatorname{tg}x)\cdot uv=0$
         A. $v'=v\operatorname{tg}x$
         B. $\frac{v'}{v}=\operatorname{tg}x$
         C. $\int\frac{dv}{v}=\int\operatorname{tg}x dx$
         D. $\ln|v|=-\ln|\cos x|+\ln|c|$
         E. $v=\frac{1}{\cos x}$
      ii. $u'=u^4v^3\cos x$
         A. $v=\frac{1}{\cos x}$; $u'=\frac{\cos x}{\cos^3 x}\cdot u^4$
         B. $\frac{du}{dx}=\frac{u^4}{\cos^2 x}$
         C. $\int\frac{du}{u^4}=\int\frac{dx}{\cos^2 x}$
         D. $-\frac{u^{-3}}{3}=\operatorname{tg}x$
         E. $-\frac{1}{3u^3}=\operatorname{tg}x+c$
         F. $\frac{1}{u^3}=-3(\operatorname{tg}x+c)$
         G. $u^3=\frac{1}{-3(\operatorname{tg}x+c)}$
         H. $u=-\frac{1}{\sqrt[3]{3(\operatorname{tg}x+c)}}$
   (e) $y=uv=-\frac{1}{\cos x\cdot\sqrt[3]{3(\operatorname{tg}x+c)}}$
5. $(2x-\frac{\sin^2 y}{x^2})dx+(2y+\frac{\sin 2y}{x})dy=0$

6. $dx = (2y + x \operatorname{tg} y - y^2 \operatorname{tg} y)dy$
7. $x' + (-\operatorname{tg} y)x = (2y - y^2 \operatorname{tg} y)$
   (a) $\frac{dx}{dy} = 2y + x \operatorname{tg} y - y^2 \operatorname{tg} y$
   (b) $x = uv$; $x' = u'v + v'u$
   (c) ...

Часть VI

Лекция 3 (16.09.15)

1.3.3 Линейные д.у. первого порядка

1. $y' + P(x)y = Q(x)$
2. Метод Бернулли: $y(x) = u(x)v(x)$; $v(x) \neq 0$
   (a) $y(x) = \frac{y(x)}{v(x)}v(x) = u(x) \cdot v(x)$; $v(x) \neq 0$
   (b) $y' = u'v + v'u$
   (c) Подстановка: $u'v + v'u + P(x)uv = P(x)$
   (d) $u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$
   (e) Выберем v так, чтобы $v' + P(x)v = 0$
   (f) $\frac{dv}{dx} = -p(x)v$
   (g) $\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx$
   (h) $\ln|v| = -\int p(x) + c$
   (i) $v = e^{-\int p(x)dx}$
   (j) Подстановка в пункт d: $u'e^{-\int p(x)dx} = Q(x)$
   (k) $u' = Q(x)e^{\int p(x)dx}$
   (l) $u(x) = \int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c$
   (m) $y = uv = (\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c)e^{-\int p(x)dx}$ - общее решение д.у.
3. Метод вариации постоянной (метод Лагранжа)
   (a) Сначала решаем однородное уравнение $y' + p(x)y = 0$
      i. $\frac{dy}{dx} = -p(x)y$
      ii. $\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$
      iii. $\ln|y| = -\int p(x)dx + c$
      iv. $y = ce^{-\int p(x)dx}$
   (b) Предполагаем, что $y = c(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$
      i. $c'e^{-\int p(x)dx} + C(-p(x))e^{-\int p(x)dx} + p(x) \cdot ce^{-\int p(x)dx} = Q(x)$
      ii. $c' = Q(x)e^{\int p(x)dx}$
      iii. $c(x) = \int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c_1$
      iv. $y = (\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx)e^{-\int p(x)dx}$
4. Примеры:
   (a) $xy' - y = x^2$; $y' - \frac{y}{x} = x$. Метод вариации постоянной:
      i. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

ii. $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$
iii. $\ln|y| = \ln|x| + \ln c$
iv. $y = cx$
v. Пусть: $y = c(x)x$
vi. $c'x + c - \frac{cx}{x} = x$
vii. $c' = 1$
viii. $c(x) = x + c_1 \Longrightarrow y = (x + c)x$ - общее решение

(b) Сила тока I в цепи с сопротивлением R, самоиндукцией L и ЭДС ε удовлетворяет следующему уравнению: $L\frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon$, причем $I(0) = 0$; $\varepsilon = kt$; $I(t)-?$

i. $L\frac{dI}{dt} + RI = kt$
ii. $I = uv$; $I' = u'v + v'u$
iii. $u'v + v'u + \frac{R}{L}uv = \frac{k}{L}t$
iv. $u'v + u(v' + \frac{R}{L}v) = \frac{k}{L}t$
v. $v' + \frac{R}{L}v = 0$
   A. $\frac{dv}{dt} = -\frac{R}{L}v$
   B. $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{R}{L}dt$
   C. $\ln|C| = -\frac{R}{L}t + c$
   D. $v = e^{-\frac{R}{L}t}$
vi. $u'e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{k}{L}t$
vii. $u = \frac{k}{L}\int te^{\frac{R}{L}t}dt = \frac{k}{L}(\frac{L}{R}te^{\frac{R}{L}t} - \frac{L}{R}\int e^{\frac{R}{L}t}dt) + c$
viii. $u = \frac{k}{L}(\frac{L}{R}te^{\frac{R}{L}t} - \frac{L^2}{R^2}e^{\frac{R}{L}t}) + c$
ix. $I = uv = \frac{k}{R}t - \frac{kL}{R^2} + ce^{-\frac{R}{L}t}$
x. $I(0) = 0$: $0 = 0 - \frac{kL}{R^2} + c \Rightarrow c = \frac{kL}{R^2}$
   A. $I = \frac{kL}{R^2}(e^{-\frac{R}{L}t} - 1) + \frac{k}{R}t$

1.3.4 Уравнение Бернулли

1. $y' + P(x)y = Q(x)y^n$; $n \neq 0; 1$
2. Метод Бернулли: $y = uv$
3. Сведение к линейному уравнению заменой $z = y^{-n+1}$
   (a) $z' = (-n+1)y^{-n}y' \Rightarrow y^{-n}y' = \frac{z'}{-n+1}$
   (b) $y' + P(x)y = Q(x)y^n \mid : y^n$
   (c) $y^{-n}y' + P(x)y^{-n+1} = Q(x)$
   (d) $\frac{z'}{-n+1} + P(x)z = Q(x)$ - линейное уравнение
4. Пример:
   (a) $2xy' + 2y = x^2y^2$; $2y' + 2\frac{y}{x} = xy^2| : y^2$
      i. $n = 2$; $z = y^{-1} = \frac{1}{y}$; $z' = -\frac{1}{y^2}y'$
      ii. $\frac{2}{y^2}y' + \frac{2}{yx} = x$
      iii. $y = 0$ - решение
      iv. $-2z' + \frac{2z}{x} = x$; $z' - \frac{z}{x} = -\frac{1}{2}$
      v. $z' - \frac{z}{x} = 0$; $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$; $\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$; $z = cx$; $z = c(x)x$
      vi. $c'x + c - \frac{cx}{x} = -\frac{1}{2}x$; $c' = -\frac{1}{2}$; $c(x) = -\frac{1}{2}x + c_1$
      vii. $z = (-\frac{1}{2}x + c_1)x$
      viii. $y = \frac{1}{z} \Rightarrow y = \frac{1}{(-\frac{x}{2}+c_1)x}$; $y = 0$ - общее решение д.у.

(b) $xy' + 4y = 2\sqrt{y} \cdot x^2$; $y(1) = 0$

i. $y' + 4\frac{y}{x} = 2\sqrt{y}x$

ii. $y = uv$; $y' = u'v + v'u$

iii. $u'v + v'u + 4\frac{uv}{x} = 2\sqrt{y}x$

iv. $u'v + u(v' + \frac{4v}{x}) = 2\sqrt{y}x$

v. $v' + \frac{4v}{x} = 0$

A. $\frac{dv}{dx} = -\frac{4v}{x}$

B. $\int \frac{dv}{v} = -4\int \frac{dx}{x}$

C. $\ln|v| = -4\ln|x| + c$

D. $v = x^{-4}$

vi. $u'x^{-4} - 2\sqrt{ux^{-4}}x$

vii. $u' = 2\sqrt{u}x^3$

viii. $\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \int x^3 dx$

ix. $\sqrt{u} = \frac{x^4}{4} + c$

x. $u = (\frac{x^4}{4} + c)^2$

xi. $y = uv = \frac{(\frac{x^4}{4}+c)^2}{x^4}$ - общее решение

xii. $x = 1$; $y = 0$: $\frac{1}{4} + c = 0$; $c = -\frac{1}{4}$

A. $y = \frac{(\frac{x^4}{4}-\frac{1}{4})^2}{x^4}$

B. $y = \frac{(x^4-1)^2}{16x^4}$ - решение задачи Коши

1.3.5 Уравнение Рикатти (сводящееся к уравнению Бернулли)

1. $y' + a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0$

2. Пусть y_0 - решение

3. Тогда замена $z = y - y_0$ сводит это уравнение к линейному

4. $z' = y' - y_0'$; $y' = z' + y_0'$

5. $z' + y_0' + a(z + y_0^2) + b(z + y_0) + c = 0$

6. $z' + y_0' + a(z^2 + 2zy_0 + y_0^2) + bz + by_0 + c = 0$

7. $z' + (y_0' + ay_0^2 + by_0 + c) + az^2 + 2azy_0 + bz = 0$

8. $z' + (2ay_0 + b)z = -az^2$ - уравнение Бернулли

9. Пример:

(a) $x^2y' + 2x^2y^2 - 5xy + 4 = 0$; $y = \frac{1}{x}$ - решение

i. Проверка: $y' = -\frac{1}{x^2}$

A. $-1 + 2 - 5 + 4 = 0$; $0 = 0$ - верно

ii. $z = y - \frac{1}{x}$; $y = z + \frac{1}{x}$; $y' = z' - \frac{1}{x^2}$

iii. $x^2(z' - \frac{1}{x^2}) + 2x^2(z + \frac{1}{x})^2 - 5x \cdot (\frac{1}{x} + z) + 4 = 0$

iv. $x^2z' - 1 + 2x^2z^2 + 4zx - 5zx + 2 - 5 + 4 = 0$

v. $z'x^2 - zx = -2x^2z^2$

vi. $z' - \frac{z}{x} = -2z^2$

vii. $z = uv$; $u'v + v'u - \frac{uv}{x} = -2z^2$

viii. $u'v + u(v' - \frac{v}{x}) = -2z^2$

ix. $v' = \frac{v}{x}$; $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$; $v = x$

x. $u'x = -2u^2x^2$

xi. $\int \frac{du}{u^2} = -2\int x dx$
xii. $-\frac{1}{u} = -x^2 + c$
xiii. $\frac{1}{u} = x^2 + c$
xiv. $u = \frac{1}{x^2+c}$
xv. $z = uv = \frac{x}{x^2+c}$
xvi. $y = z + \frac{1}{x} \Rightarrow y = \frac{x}{x^2+c} + \frac{1}{x}$ - общее решение

Часть VII

Опциональный семинар 1 (16.09.15)

Линейные уравнения

1. $y' + P(x)y = Q(x)$
2. Способы решения:
   (a) Метод Бернулли: $y = uv$
   (b) Метод вариации постоянной (метод Лагранжа)

Примеры

1. $y' + 2xy = 2x^2e^{-x^2}$ - линейное д.у. методом Бернулли
   (a) $y = uv$; $y' = u'v + v'u$
   (b) $u'v + v'u + 2xuv = 2x^2e^{-x^2}$
   (c) $u'v + u(v' + 2xv) = 2x^2e^{-x^2}$
   (d) $v' + 2xv = 0$
      i. $\frac{dv}{dx} = -2xv$
      ii. $\frac{dv}{v} = -2xdx$
      iii. $\int \frac{dv}{v} = -2\int xdx$
      iv. $\ln|v| = -x^2 + c$; $c = 0$
      v. $v = e^{-x^2}$
   (e) $u'v = 2x^2e^{-x^2}$; $v = e^{-x^2}$
   (f) $\frac{du}{dx} = 2x^2$
   (g) $\int du = 2\int x^2dx$
   (h) $u = 2\frac{x^3}{3} + c$
   (i) $y = uv = (\frac{2}{3}x^3 + c)e^{-x^2}$ - общее решение
2. $y' + y\operatorname{tg}x = 2\cos^2 x$; $\cos x \neq 0$ - методом вариации постоянной
   (a) $y' + y\operatorname{tg}x = 0$
      i. $\frac{dy}{dx} = -y\operatorname{tg}x$
      ii. $\int \frac{dy}{y} = -\int \operatorname{tg}x dx$
      iii. $\ln|y| = -\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + \ln c$
      iv. $y = c\cos x$
      v. $y = c(x)\cos x$
   (b) $c'\cos x - c\sin x + c\sin x = 2\cos^2 x$

   (c) $c' \cos x = 2\cos^2 x$
   (d) $c' = 2\cos x$; $c = 2\sin x + c_1$
   (e) $y = (2\sin x + c_1)\cos x = \sin 2x + c_1 \cos x$

3. $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x$; $y(0) = 0$
   (a) $y = uv$; $y' = u'v + v'u$
   (b) $u'v + v'u + \frac{uv}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$
   (c) $u'v + u(v' + \frac{v}{\sqrt{1-x^2}}) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$
   (d) $v' + \frac{v}{\sqrt{1-x^2}} = 0$
      i. $v' = -\frac{v}{\sqrt{1-x^2}}$
      ii. $\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{\sqrt{1-x^2}}$
      iii. $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
      iv. $\ln|v| = -\arcsin x$
      v. $v = e^{-\arcsin x}$
   (e) $u'e^{-\arcsin x} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$
   (f) $\frac{du}{dx}e^{-\arcsin x} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$
   (g) $\int du = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot e^{\arcsin x} dx =$
   $= \int t \cdot e^t dt = \begin{vmatrix} u = t & du = dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{vmatrix} =$
   $= te^t - \int e^t dt = e^t(t-1)$
   (h) $u = e^{\arcsin x}(\arcsin x - 1) + c$
   (i) $y = uv = (e^{\arcsin x}(\arcsin x - 1) + c)e^{-\arcsin x}$
   (j) $y = \arcsin x - 1 + ce^{-\arcsin x}$ - общее решение
   (k) $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$; $0 = 0 - 1 + c$; $c = 1$; $y = \arcsin x - 1 + e^{-\arcsin x}$

Уравнение Бернулли

1. $y' + P(x)y = Q(x)y^n$; $y \neq 0; 1$
2. Метод Бернулли: $y = uv$

Примеры

1. $xy' - y = \frac{x^4}{3y^2}$
   (a) $y' - \frac{y}{x} = \frac{x^3}{3y^2}$
   (b) $y = uv$; $y' = u'v + v'u$
   (c) $u'v + v'u - \frac{uv}{x} = \frac{x^3}{3u^2v^2}$
   (d) $u'v + u(v' - \frac{v}{x}) = \frac{x^3}{3u^2v^2}$
   (e) $v' - \frac{v}{x} = 0$
      i. $\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$
      ii. $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$
      iii. $\ln|v| = \ln|x| + c$; $c = 0$
      iv. $v = x$

   (f) $u'x = \frac{x^3}{3u^2x^2}$
   (g) $u' = \frac{1}{3u^2}$
   (h) $\int 3u^2du = \int dx$
   (i) $u^3 = x + c$
   (j) $u = \sqrt[3]{x+c}$
   (k) $y = uv = \sqrt[3]{x+c} \cdot x$ - общее решение

2. $xy' = 3y - x^4y^2$; $y(1) = 7$
   (a) $y' - 3\frac{y}{x} = -x^3y^2$
   (b) $y = uv$; $y' = u'v + v'u$
   (c) $u'v + v'u - 3\frac{uv}{x} = -x^3u^2v^2$
   (d) $u'v + u(v' - 3\frac{v}{x}) = -x^3u^2v^2$
   (e) $v' - 3\frac{v}{x} = 0$
      i. $\frac{dv}{dx} = \frac{3v}{x}$
      ii. $\int \frac{dv}{v} = 3\int \frac{dx}{x}$
      iii. $\ln|v| = 3\ln|x| + c$; $c = 0$
      iv. $v = x^3$
   (f) $u'x^3 = -x^3u^2x^6$
   (g) $u' = -u^2x^6$
   (h) $\frac{du}{dx} = -u^2x^6$
   (i) $-\int u^{-2}du = \int x^6dx$
   (j) $\frac{1}{u} = \frac{x^7}{7} + c$
   (k) $y = uv = \frac{x^3}{(\frac{x^7}{7}+c)}$ - общее решение
   (l) $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 7 \end{cases}$; $7 = \frac{1}{\frac{1}{7}+c}$; $\frac{1}{7} = \frac{1}{7} + c$; $c = 0$; $y = \frac{7x^3}{x^7} = \frac{7}{x^4}$

Задача 1.5

1. Вариант 15: $(2e^y - x) \cdot y' = 1$; $y(2) = 0$
   (a) $y' = \frac{1}{2e^y - x}$
   (b) $x' = 2e^y - x$
   (c) $x' + x = 2e^y$
   (d) $x = uv$; $x' = u'v + v'u$
   (e) $u'v + v'u + uv = 2e^y$
   (f) $u'v + u(v' + v) = 2e^y$
   (g) $v' - v = 0$
      i. $\frac{dv}{dy} = -v$
      ii. $\int \frac{dv}{v} = -\int dy$
      iii. $\ln|v| = -y + c$; $c = 0$
      iv. $v = e^{-y}$
   (h) $u'e^{-y} = 2e^y$
   (i) $\frac{du}{dy} = 2e^{2y}$
   (j) $\int du = \int e^{2y}d2y$
   (k) $u = e^{2y} + c$
   (l) $x = uv = (e^{2y} + c)e^{-y}$
   (m) $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 0 \end{cases}$; $2 = 1 + c$; $c = 1$; $x = e^y + e^{-y}$

Домашнее задание

1. 10.67,68,70,72,84,86,87,94

Часть VIII

Лекция 4 (23.09.15) [Пропущено]

1.3.6 Уравнения в полных дифференциалах

1. Определение: Уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du$
2. Замечание: $du = 0 \Rightarrow u(x,y) = c$
3. Теорема: Если $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в Д, то $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ является положительным дифференциалом.
   (a) Доказательство:
      i. Пусть:
         A. $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du$
         B. $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$
      ii. Тогда:
         A. $P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}$; $Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$
         B. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y \partial x}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
      iii. Пусть:
         A. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
         B. Найдем $u(x,y)$ такой, что $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du$
      iv. Тогда:
         A. $P(x,y) \to u = \int P(x,y)dx + f(y)$
         B. $Q(x,y) \to (\int P(x,y)dx + f(y))'_y = Q(x,y)$
      v. Пример: $(2xy-5)dx + (3y^2 + x^2)dy = 0$
         A. $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
         B. $u(x,y) = c$; $\frac{\partial u}{\partial x} = P$; $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$
         C. $\frac{\partial u}{\partial x} = P \Rightarrow u = \int P(x,y)dx + \varphi(y) = \int(2xy-5)dx + \varphi(y) =$
         $= x^2y - 5x + \varphi(y)$
         D. $\frac{\partial u}{\partial y} = Q \Rightarrow (x^2y - 5x + \varphi(y))'_y = 5y^2 + x^2$
         E. $x^2 + \varphi'(y) = 3y^2 + x^2$; $\varphi'(y) = 3y^2$
         F. $\varphi(y) = \int 3y^2 dy = y^3 + c$
         G. $u = x^2y - 5x + y^3 + c$; $x^2y - 5x + y^3 = c$

1.3.7 Уравнения, неразрешимые относительно y'. Уравнения Лагранжа

1. $y = x\varphi(y') + \psi(y')$
2. Замена $y' = p$; $y = x\varphi(p) + \psi(p)$
3. $y' = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi(p)$
4. $(p - \varphi(p))\frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \psi'(p)$
5. $x' - x\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$
6. $\begin{cases} x = \lambda(p,c) \\ y = \mu(p,c) \end{cases}$

1.3.8 Метод изоклин для приближенного решения д.у.

1. $y' = f(x, y)$
2. $(x_0, y_0) \to y'(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha$
3. Определение: Для д.у. $y' = f(x, y)$ **изоклиной** называется линия, которая представляет из себя геометрическое место точек таких, что $f(x, y) = k$
4. Алгоритм:
   (a) Строим изоклины для разных k
   (b) По изоклинам рисуем поле направлений
   (c) Соединяя линией точки, получаем интегральную кривую, которая в каждой точке имеет заданное направление касательной
5. Примеры:
   (a) $y' = -\frac{x}{y}$ [175]
      i. Изокллины: $-\frac{x}{y} = k$; $y = -\frac{x}{k}$
      ii.

k	α	y
1	$\frac{\pi}{4}$	$y = -x$
-1	$\frac{3\pi}{4}$	$y = x$
0	0	$x = 0$
∞	$\frac{\pi}{2}$	$y = 0$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$

      iii. Аналитическое решение:
         A. $\int y dy = -\int x dx$
         B. $\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c$

   (b) $y' = y^2 - x$; $A(0; 1)$ [176]
      i. Изоклины: $y^2 - x = k$; $y^2 = x + k$
      ii.

k	α	y
0	0	$x = y^2$
1	$\frac{\pi}{4}$	$x = y^2 - 1$
-1	$\frac{3\pi}{4}$	$x = y^2 + 1$

1.4 Теорема существования и единственности задачи Коши. Особое решение

1. $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
2. Пусть:
   (a) $|x - x_0| \leq d$
   (b) $|y - y_0| \leq b$
   (c) $f(x, y)$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ непрерывны в области Д
3. Тогда:
   (a) $\exists d : \forall x : x_0 - d \leq x \leq x_0 + d$, на котором решение уравнения $y' = F(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ существует е единственно.
4. Замечание: Если $F(x, y)$ непрерывна, то решение задачи Коши существует.
5. Точки, в которых нарушается единство задачи Коши, называются **особыми точками**. Решения, состоящие из особых точек, называются **особыми решениями**.

Часть IX

Лекция 5 (28.09.15) [Пропущено]

Часть X

Лекция 6 (7.10.15)

2 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

1. Определение: **Линейным д.у. n-го порядка** называется уравнение линейное относительно $y, y', y'', ..., y^{(n)}$, т.е. уравнение вида $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x)$ (1), где $a_i(x), f(x)$ непрерывны на некотором интервале (a, b) и $a_0(x) \neq 0$.
2. $L_n[\,] = a_0(x)\frac{d^n}{x^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{x^{n-1}} + ... + a_n(x)$
3. (1) $\Leftrightarrow L_n[y] = f(x)$ — линейное дифференциальное уравнение
4. Если $f(x) = 0$, то уравнение $L_n[y] = 0$ — линейное **однородное** д.у. n-го порядка.
5. Если $f(x) \neq 0$, то $L_n[y] = f(x)$ — линейное **неоднородное** д.у. n-го порядка.

2.1 Линейные однородные д.у. n-го порядка

1. $a_0(x)y^{(n)} + ... + a_n(x)y = 0 \Leftrightarrow L_n[y] = 0$
2. Теорема 1: Множество решений д.у. $L_n[y] = 0$ $\{y_i\}$ составляет линейное пространство на множестве функций $C^n(a, b)$ (множество непрерывных функций, со своими производными вплоть до n-го порядка).
3. Определение: Множество функций $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ **линейно независимо** на отрезке $[a, b]$, если $\lambda_1\varphi_1 + ... + \lambda_n\varphi_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \forall x \in [a, b]$
   (a) Пример: Проверить на линейную независимость систему функций $1, x, x^2$
      i. $\lambda_1 1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 = 0$
      ii. $x = 0$: $\lambda_1 = 0$
      iii. $\lambda_2 + 2\lambda_3 x = 0$
      iv. $\lambda_2 = 0$
      v. $2\lambda_3 = 0$
      vi. $\lambda_3 = 0$
      vii. $\lambda_{1,2,3} = 0 \Rightarrow$ система функций $1, x, x^2$ **линейно независима**
   (b) Пример: $1, \cos^2\varphi, \cos 2\varphi$
      i. $\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$
      ii. $\frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}\cos 2\varphi - 1\cos^2\varphi = 0 \Rightarrow$ система **линейно зависима**
4. Определение:
   (a) Пусть:
      i. $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x) \in C^n(a, b)$
   (b) Тогда:
      i. $W(\varphi_1, ..., \varphi_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & ... & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & ... & \varphi_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & ... & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$ — **определитель Вронского**
   (c) Свойства:

i. Если $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, то $W(\varphi_1, ..., \varphi_n) \equiv 0 \forall x \in [a, b]$

ii. Если $W(\varphi_1, ..., \varphi_n) \neq 0$ хотя бы в одной точке, то $\varphi_1, ..., \varphi_n$ линейно независимы.

5. Утверждение: Для $L_n[y] = 0$ выполняется условие теоремы существования и единственности задачи Коши.

6. Определение: Система функций $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ называется **фундаментальной системой решений** линейного однородного дифференциального уравнения $L_n[y] = 0$, если:

   (a) Все $\varphi_i(x)$ являются решением $L_n[y] = 0$

   (b) $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ — линейно независимая система

7. Теорема 2 (существования): фундаментальная система решений для линейного однородного д.у. $L_n[y] = 0$ всегда существует.

8. Теорема: Если $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — ФСР, то $y = c_1\varphi_1 + ... + c_n\varphi_n$ — тоже решение уравнения $L_n[y] = 0$ и обратно: любое решение уравнения $L_n[y] = 0$ может быть представлено в виде $y = \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i$.

9. Пример: Проверить, что e^{3x} и e^{-2x} являются решениями $y'' - y' - 6y = 0$ и найти общее решение уравнения.

   (a) $y_1 = e^{3x}$: $9e^{3x} - 3e^{3x} - 6e^{3x} = 0$ — является решением

   (b) $y_2 = e^{-2x}$: $4e^{-2x} + 2e^{-2x} - 6e^{-2x} = 0$ — является решением

   (c) Проверка линейной независимости:

      i. $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-2x} \\ 3e^{3x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^x - 3e^x = -5e^x \neq 0 \forall x \in R \Longrightarrow$ линейно независимая система $\Rightarrow$ ФСР : $\{e^{3x}, e^{-2x}\}$

   (d) Общее решение однородного уравнения: $y_{\text{оо}} = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$

10. Если $y_1(x)$ — решение $L_n[y] = 0$, то заменой $z = c_1(x)y_1(x)$ получаем понижение порядка уравнения на 1.

   (a) Пример: $x^2y'' - xy' - 15y = 0$; $y_1 = x^5$

      i. $y = x^5$: $20x^5 - 5x^5 - 15x^5 = 0$ — решение

      ii. Замена: $y = c(x) \cdot x^5$; $y' = c'x^5 + 5cx^4$; $y'' = c''x^5 + 5c'x^4 + 5c'x^4 + 20cx^3$

      iii. $x^2(c''x^5 + 10c'x^4 + 20cx^3) - c'x^6 - 5cx^5 - 15cx^5 = 0$

      iv. $c''x^7 + 9c'x^6 = 0$; $x = 0$ не является решением

      v. $c''x + 9c' = 0$

      vi. $z'x + 9z = 0$ — уравнение с разделяющимися переменными

      vii. $\int \frac{dz}{z} = -9 \int \frac{dx}{x}$

      viii. $z = \tilde{c_1}x^{-9} = c'$

      ix. $c(x) = \tilde{\tilde{c_1}}x^{-8} + c_2$

      x. $y = (\tilde{\tilde{c_1}}x^{-8} + c_2)x^5 = \tilde{\tilde{c_1}}x^{-3} + \tilde{\tilde{c_1}}x^5$ — решение

2.2 Линейные неоднородные д.у. n-го порядка

1. $a_0y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x) \Leftrightarrow L_n[y] = f(x)$

2. Теорема: Общее решение линейного неоднородного д.у. представляет из себя сумму общего решение однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения $y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{ч}}$

3. Пример: Найти общее решение $(x^2+1)y''-2xy'+2y = 6(x^2+1)$, если частное решение равно $\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = x^2 - 1 \end{cases}$

   (a) $y_{oo} = c_1x + c_2(x^2 - 1)$

(b) Метод вариации постоянной: $y = c_1(x)x + c_2(x)(x^2-1)$

(c) $\begin{cases} c_1'x + c_2'(x^2-1) = 0 \\ c_1'x' + c_2'(x^2-1)' = 6(x^2+1) \Leftrightarrow c_1' + c_2' \cdot 2x = 6(x^2+1) \end{cases}$

(d) $-c_2'\frac{(x^2-1)}{x} + c_2' \cdot 2x = 6(x^2+1)$

(e) $c_2'(\frac{-x^2+1+2x^2}{x}) = 6(x^2+1)$

(f) $c_2'(\frac{x^2-1}{x}) = 6(x^2-1)$

(g) $c_2' = 6x$; $c_2 = 3x^2 + \tilde{c_2}$

(h) $c_1' = -6x\frac{(x^2-1)}{x} = -6(x^2-1)$

(i) $c_1 = -2x^3 + 6x + \tilde{c_1}$

(j) $y = (3x^2 + \tilde{c_2})x + (-2x^3 + 6x + \tilde{c_1})(x^2-1)$

(k) $y = x^4 + 3x^2 + \tilde{c_1}x + \tilde{c_2}(x^2-1)$

Часть XI

Лекция 7 (14.10.15)

2.3 Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = 0$ (1)
   (a) $a_0 \neq 0$
   (b) $a_i = const \in R$
2. Теорема 1: $y = e^{\lambda x}$ является решением уравнения (1) $[L_n[y] = 0]$ тогда и только тогда, когда λ — корень характеристического уравнения $P_n(\lambda) = 0$
   (a) Будем искать решение в виде $y = e^{\lambda x}$
   (b) $y' = \lambda e^{\lambda x}$, ..., $y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$
   (c) $a_0\lambda^n e^{\lambda x} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + ... + a_{n-1}\lambda e^{\lambda x} + a_ne^{\lambda x} = 0$
   (d) $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \Leftrightarrow P_n(\lambda) = 0$ — характеристическое уравнение
   (e) Замечание: Характеристическое уравнение $P_n(\lambda) = 0$ имеет n корней (с учетом кратности).
3. Теорема 2:
   (a) Пусть:
      i. $P_n(\lambda) = 0$ имеет n различных корней $\lambda_1 ... \lambda_n \in R$; $\lambda_i \neq \lambda_j \; \forall i \neq j$
   (b) Тогда:
      i. $L_n[y] = 0$ имеет фундаментальную систему решений (ФСР) $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, ..., e^{\lambda_n x}\}$
   (c) Доказательство:
      i. $\forall i \; e^{\lambda_i x}$ — решение уравнения $L_n[y] = 0$
      ii. Докажем линейную независимость ФСР
      iii. $W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & ... & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1}e^{\lambda_2 x} & ... & \lambda_n^{n-1}e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$
      $= e^{x\sum\lambda_i} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$, если $\lambda_i \neq \lambda_j \; \forall i \neq j$

   iv. $W = 0 \Rightarrow$ система линейно независима $\Rightarrow$ ФСР
   v. $y_{oo} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i x}$ — общее решение однородного уравнения

4. Пример 1: $y''' - 4y' = 0$
   (a) $\lambda^3 - 4\lambda = 0$; $\lambda(\lambda^2 - 4) = 0$
   (b) $\lambda = 0; \pm 2$
   (c) ФСР: $\{1, e^{2x}, e^{-2x}\}$
   (d) $y_{oo} = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$
5. $\lambda_1 = a + b_i \in C \Longrightarrow \lambda_2 = a - b_i$
6. Теорема 3:
   (a) Пусть:
      i. $P_n(\lambda) = 0$ имеет n корней
      ii. $\{\lambda_1, ..., \lambda_n, \mu_1\overline{\mu_1}, ..., \mu_m\overline{\mu_m}\}$; $\lambda_i \in R$; $\mu_i \in C$
   (b) Тогда:
      i. $L_n[y] = 0$ имеет следующую ФСР: $\{e^{\lambda_1 x}, ..., e^{\lambda_k x}, e^{a_1 x}\cos b_1 x, e^{a_1 x}\sin bx, ..., e^{a_m x}\cos b_m x, e^{a_m k}\sin b_m k\}$
7. Пример 2: $y'' - 4y' + 5y = 0$
   (a) $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$
   (b) $\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$
   (c) ФСР: $\{e^{2x}\cos x, e^{2x}\sin x\}$
   (d) $y_{oo} = c_1 e^{2x}\cos x + c_2 e^{2x}\sin x =$
   (e) $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$
      i. $1 = c_1$
      ii. $y' = 2c_1 e^{2x}\cos x - c_1 e^{2x}\sin x + 2c_2 e^{2x}\sin x + c_2 e^{2x}\cos x$
      iii. $2 = 2c_1 + c_2$
      iv. $c_2 = 0$
      v. Ответ: $y = e^{2x}\cos x$
8. Пусть $\lambda = \lambda_i$ — корень кратности k
   (a) $y_p = x^p e^{\lambda_i x}$
9. $L_n[y] = 0 \Longleftrightarrow P_n(\lambda) = 0$
   (a) $\lambda \in R$ (не кратный): $y = e^{\lambda x}$
   (b) $\lambda \in R$ (кратности k): $y_1 = e^{\lambda x}$; $y_2 = xe^{\lambda x}$; ...; $y_k = x^{k-1}e^{\lambda x}$
   (c) $\lambda = a \pm bi \in C$ (не кратный): $y_1 = e^{ax}\cos bx$; $y_2 = e^{ax}\sin bx$
   (d) $\lambda = a \pm bi \in C$ (кратности k): $y_1 = e^{ax}\cos bx$; $y_2 = e^{ax}\sin bx$; $y_3 = xe^{ax}\cos bx$; ...; $y_{2k-1} = x^{k-1}e^{ax}\cos bx$; $y_{2k} = x^{k-1}e^{ax}\sin x$
10. Пример 3: $y^{(4)} + 4y''' + 4y'' = 0$
   (a) $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = 0$
   (b) $\lambda^2(\lambda^2 + 4\lambda + 1) = 0$
   (c) $\lambda^2(\lambda + 2)^2 = 0$
   (d) $\lambda_{1,2} = 0 \Rightarrow y_1 = 1; y_2 = x$
   (e) $\lambda_{3,4} = -2 \Rightarrow y_3 = e^{-2x}; y_4 = xe^{-2x}$

   (f) ФСР: $\{1, x, e^{-2x}, xe^{-2x}\}$
   (g) $y_{oo} = c_1 + c_2x + c_3e^{-2x} + c_4xe^{-2x}$

11. Пример 4: $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$
   (a) $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0$
   (b) $(\lambda^2 + 4)^2 = 0$
   (c) $\lambda_{1,2,3,4} = \pm 2i$
   (d) ФСР: $\{\cos 2x; \sin 2x; x\cos 2x; x\sin 2x\}$
   (e) $y_{oo} = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + c_3x\cos 2x + c_4x\sin 2x$

12. Пример 5: $y''' + 27y = 0$
   (a) $\lambda^3 + 27 = 0$
   (b) $(\lambda + 3)(\lambda^2 - 3\lambda + 9) = 0$
   (c) $\lambda_1 = -3$; $\lambda_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
   (d) ФСР: $\{e^{-3x}; e^{\frac{3}{2}x}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}x; e^{\frac{3}{2}x}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}x\}$

Часть XII

Лекция 8 (21.10.15)

2.4 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = f(x)$
   (a) $a_0 \neq 0$
   (b) $a_i \in R$
   (c) $f(x) \neq 0$
   (d) $f(x)$ непрерывна

2. $y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чр}}$

2.4.1 Метод вариации постоянной для нахождения частного решения

1. $y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$
   (a) ФСР: $\{y_1, y_2\}$
   (b) $y_{\text{оо}} = c_1y_1 + c_2y_2$
   (c) $y_{\text{ч}} = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$
   (d) $y' = c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2'$
   (e) Пусть $c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \Rightarrow y' = c_1y_1' + c_2y_2'$
   (f) $y'' = c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2''$
   (g) $c_1'y_1' + c_1'y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2'' + a_1c_1y_1' + a_1c_2y_2' + a_2c_1y_1 + a_2c_2y_2 = f(x)$
   (h) $c_1(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + c_2(y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) + c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x)$
   (i) $\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x) \end{cases}$
      i. $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \not\equiv 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение

(j) Находим c_1' и c_2'

2. $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = f(x)$

   (a) $y_{oo} = c_1y_1 + ... + c_ny_n$

   (b) $y_{ч} = c_1(x)y_1 + c_n(x)y_n$

   (c) $\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 + ... + c_n'y_n = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' + ... + c_n'y_n' = 0 \\ ... \\ c_1'y_1^{(n-1)} + ... + c_n'y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$

3. Примеры: $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^3 2x}$

   (a) $y_{он} = y_{оо} + y_{ч}$

   (b) Находим $y_{оо}$:

      i. $y'' + 4y = 0$

      ii. $\lambda^2 + 4 = 0$

      iii. $\lambda = \pm 2i$

      iv. $y_1 = \cos 2x$; $y_2 = \sin 2x$

      v. ФСР: $\{\cos 2x; \sin 2x\}$

      vi. $y_{оо} = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

   (c) Находим $y_{ч}$:

      i. $y_{ч} = c_1(x)\cos 2x + c_2(x)\sin 2x$

      ii. $\begin{cases} c_1' \cos 2x + c_2' \sin 2x = 0 \\ -2c_1' \sin 2x + 2c_2' \cos 2x = \frac{1}{\sin^3 2x} \end{cases}$

      iii. $\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin 2x = 2 \neq 0$ — можно решать дальше

      iv. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \frac{1}{\sin^3 2x} & 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sin^2 2x}$

      v. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \frac{1}{\sin^3 x} \end{vmatrix} = \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x}$

      vi. $c_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{2\sin^2 2x}$

      vii. $c_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\cos 2x}{2\sin^3 2x}$

      viii. $c_1 = -\int \frac{dx}{2\sin^2 2x} = \frac{1}{4}\operatorname{ctg} 2x$

      ix. $c_2 = \int \frac{\cos 2x}{2\sin^3 2x}dx = \frac{1}{4}\int \frac{d\sin 2x}{\sin^3 2x} = -\frac{1}{8\sin^2 2x}$

      x. $y_{ч} = \frac{1}{4}\operatorname{ctg} 2x \cdot \cos 2x - \frac{1}{8\sin^2 2x}\sin 2x$

   (d) $y_{он} = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos^2 2x}{\sin 2x} - \frac{1}{8\sin^2 2x}$

2.4.2 Метод неопределенных коэффициентов (метод подбора) для нахождения частного решения д.у.

1. Теорема: Если y_1 — частное решение уравнения $L_n[y] = f_1$, а y_2 — частное решение уравнения $L_n[y] = f_2$, тогда $y_1 + y_2$ — частное решение уравнения $L_n[y] = f_1 + f_2$.

2. Теорема: Если $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, тогда:

   (a) Если a — не корень характеристического уравнения, то $y_{ч} = Q_n(x)e^{ax}$ (Q_n — многочлен с неопределенными коэффициентами)

      i. $Q_0 = A$; $Q_1 = Ax + B$; $Q_2 = Ax^2 + Bx + C$

   (b) Если a — корень кратности k характеристического уравнения, то $y_{ч} = x^kQ_n(x)e^{ax}$

3. Теорема: Если $f(x) = Q_n(x)e^{ax}\cos bx + R_m(x)e^{ax}\sin bx$
   (a) Если $a \pm bi$ — не корень характеристического уравнения, то $y_ч = Q_N(x)e^{ax}\cos bx + T_N(x)e^{ax}\sin bx$ $(N = \{\max n, m\})$
   (b) Если $a \pm bi$ — корень кратности k характеристического уравнения, то $y_ч = x^k(Q_N(x)e^{ax}\cos bx + T_N(x)e^{ax}\sin bx)$
4. Пример: $y''' + 4y'' = 24x + 22 + 6e^{-x}$
   (a) Найдем $y_{оо}$
      i. $y''' + 4y'' = 0$
      ii. $\lambda^3 + 4\lambda^2 = 0$
      iii. $\lambda = 0; 0; -4$
      iv. $y_{оо} = c_1 + c_2x + c_3e^{-4x}$
   (b) Найдем $y_ч$
      i. $f(x) = 24x + 22 + 6e^{-x}$
      ii. $f_1 = 24x + 22$; $a = 0$; $n = 1$
      iii. $y_{ч1} = x^2Q_1(x)e^{0x} = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2$
         A. $y' = 3Ax^2 + 2Bx$
         B. $y'' = 6Ax + 2B$
         C. $y''' = 6A$
         D. $6A + 4(6Ax + 2B) = 24x + 22$
         E. $6A + 24Ax + 8B = 24x + 22$
         F. x_1: $24A = 24$
            x_2: $6A + 8B = 22$
         G. $A = 1$; $B = 2$
         H. $y_{ч1} = x^3 + 2x^2$
         I. Проверка...
      iv. $f_2 = 6e^{-x}$; $a = -1$ — не корень; $n = 0$
      v. $y_{ч2} = Q_0(x)e^{-x} = Ae^{-x}$
         A. $y' = -Ae^{-x}$
         B. $y'' = Ae^{-x}$
         C. $y''' = -Ae^{-x}$
         D. $-Ae^{-x} + 4Ae^{-x} = 6e^{-x}$
         E. $3Ae^{-x} = 6e^{-x}$
         F. $A = 2$
         G. $y_{2ч} = 2e^{-x}$
         H. Проверка...
   (c) $y_{он} = c_1 + c_2x + c_3e^{-4x} + x^3 + 2x^2 + 2e^{-x}$
5. Пример: $y'' - 9y = 3e^{3x} + 13\sin 2x$
   (a) Найдем $y_{оо}$
      i. $y'' - 9y = 0$
      ii. $\lambda^2 - 9 = 0$
      iii. $\lambda = \pm 3$
      iv. $y_{оо} = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$
   (b) Найдем $y_ч$
      i. $f(x) = 3e^{3x} + 13\sin 2x$
      ii. $f_1 = 13\sin 2x$; $a = 0$; $b = 2$; $a + bi = \pm 2i$ — не корень; $n = 0$

iii. $y_{ч1} = Q_0(x)e^{0x}\cos 2x + T_0(x)e^{0x}\sin 2x = A\cos 2x + B\sin 2x$
   A. $y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$
   B. $y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$
   C. $-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 9\sin 2x = 13\sin 2x$
   D. $\cos 2x$: $-4A - 9A = 0$
   $\sin 2x$: $-4B - 9B = 13$
   E. $A = 0$; $B = 1$
   F. $y_{ч1} = -\sin 2x$

iv. $f_2 = 3e^{3x}$; $a = 3$ — корень хар.ур.; $n = 0$
   A. $y_{ч2} = xQ_0(x)e^{3x} = Axe^{3x}$
   B. $y' = Ae^{3x} + 3Axe^{3x}$
   C. $y'' = 6Ae^{3x} + 9Axe^{3x}$
   D. $6Ae^{3x} = 3e^{3x}$
   E. $A = \frac{1}{2}$
   F. $y_{ч2} = \frac{1}{2}xe^{3x}$

(c) $y_{он} = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} + \frac{1}{2}xe^{3x} - \sin 2x$

Часть XIII

Семинар 4 (28.10.15)

1. $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = \begin{cases} f(x) & \text{— неоднородное уравнение} \\ 0 & \text{— однородное уравнение} \end{cases}$ с постоянными коэффициентами

   $a_0 \neq 0$

2. $y_{он} = y_{оо} + y_ч$

   (a) $y_{оо} = c_1y_1 + c_2y_2 + ...$; $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ — ФСР

3. $y^{(4)} + 10y''' + 21y'' = 0$

   (a) $\lambda^2(\lambda^2 + 10\lambda + 21) = 0$
   (b) $\lambda = 0; 0; -7; -3$
   (c) $y_{оо} = c_1 + c_2x + c_3e^{-7x} + c_4e^{-3x}$

4. $y''' + 4y'' + 13y' = 0$

   (a) $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$
      i. $\lambda(\lambda^2 + 4\lambda + 13) = 0$
      ii. $\lambda = 0; -2 \pm 3i$
      iii. $y_{оо} = c_1 + c_2e^{-2x}\cos 3x + c_3e^{-2x}\sin 3x$

5. $y'' + 2y' - 3y = 6$

   (a) $y'' + 2y' - 3y = 0$
      i. $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$
      ii. $\lambda = -1 \pm 2 = -3; 1$
      iii. $y_{оо} = c_1e^{-3x} + c_2e^x$

   (b) $\begin{cases} c_1'e^{-3x} + c_2'e^x = 0 \\ -3c_1'e^{-3x} + c_2'e^x = 6 \end{cases}$
      i. ...

Часть XIV

Лекция 9 (28.10.15)

2.5 Задачи, сводящиеся к линейным д.у.

2.5.1 Гармонические колебания

1. $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
   (a) $\lambda^2 + \omega^2 = 0$; $\lambda = \pm i\omega$
   (b) $x = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t = A\cos(\omega t + \varphi)$ — собственные колебания системы
2. $\ddot{x} + \omega^2 x = b\sin\alpha t$ — вынужденные колебания
   (a) $\alpha \neq \omega$: $x_ч = D\cos\alpha t + E\sin\alpha t$
      i. $x = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{b}{\omega^2 - \alpha^2}\sin\alpha t$
   (b) $\alpha = \omega$: $x_ч = t(D\cos\omega t + E\sin\omega t)$ — резонанс
      i. $x = A\cos(\omega t + \varphi) - \frac{b}{2\omega} t\cos\omega t$

2.5.2 Уравнения Эйлера

1. $a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x)$
2. Замена: $x = e^t$ $(x > 0)$
   (a) Если $a_0(cx+d)^n y^{(n)} + a_1(cx+d)^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x)$, то $cx + d = e^t$
3. $x = e^t \Rightarrow t = \ln x$
   (a) $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \dot{y} \cdot \frac{1}{x} = \dot{y} \cdot e^{-t}$
   (b) $y'' = \frac{d}{dt}(\dot{y}e^{-t})\frac{dt}{dx} = (\ddot{y}e^{-t} - \dot{y}e^{-t})e^{-t} = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$
4. Пример: $x^2 y'' - xy' + y = \cos\ln x$
   (a) $x > 0$; $x = e^t$
   (b) $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = \cos t$
      i. $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$; $\lambda = 1; 1$
      ii. $y_{оо} = c_1 e^t + c_2 t e^t$
      iii. $f(t) = \cos t$; $a = 0$; $b = 1$; $\pm i$ — не корень; $n = 0$
      iv. $y_ч = A\cos t + B\sin t$; $y' = -A\sin t + B\cos t$; $y'' = -A\cos t - B\sin t$
      v. $-A\cos t - B\sin t + 2A\sin t - 2B\cos t + A\cos t + B\sin t = \cos t$
      vi. $2A\sin t - 2B\cos t = \cos t$
         A. sin: $2A = 0$; $A = 0$
         B. cos: $-2B = 1$; $B = -1$
      vii. $y_ч = -\frac{1}{2}\sin t$
      viii. $y_{он} = c_1 e^t + c_2 t e^t - \frac{1}{2}\sin t$
   (c) $y_{он} = c_1 x + c_2 x\ln x - \frac{1}{2}\sin\ln x$

3 Системы дифференциальных уравнений

1. Общий вид системы: $F_k(x, y_1, ..., y_1^{(k_1)}, y_2, ..., y_2^{(k_2)}, ..., y_n, ..., y_n^{(k_n)}) = 0l\ k \in \mathbb{Z}$
2. Канонический вид системы: $\begin{cases} y_1^{(k_1)} = f_1(x, y_1, ..., y_1^{(k_1-1)}, ..., y_n^{(k_n-1)}) \\ y_2^{(k_2)} = f_2(x, y_1, ..., y_2^{(k_2-1)}, ..., y_n^{(k_n-1)}) \\ ... \end{cases}$
3. $k_1 + k_2 + ... + k_n$ — порядок системы
4. Нормальный вил системы: $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, ..., x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, ..., x_n) \\ ... \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases}$, $x_i(t)$ (1)
5. Пусть:
   (a) $\dot{x_1} = f_i(t, x_1, ..., x_n)$; $i = 1, ..., n$
   (b) $\begin{cases} x_1(t) = \dot{x_1} \\ x_2(t) = \dot{x_2} \\ ... \\ x_1(n) = \dot{x_n} \end{cases}$ (2)
6. Теорема (существования и единственности задачи Коши):
   (a) Пусть:
      i. f_i определены в области D $(n+1)$-мерного пространства
      ii. Существует окрестность точки $M(t_0, x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in D$, в которой все f_i:
         A. непрерывны
         B. имеют ограниченные частные производные по x_j для всех i и j
   (b) Тогда:
      i. Существует интервал $t_0 - h < t < t_0 + h$, в котором существует решение системы (1), причем единственное, с начальными условиями (2)
7. Определение: Система функций $x_k = x_k(t, c_1, ..., c_n)$, $c_i = const$ является **общим решением** системы (1), если:
   (a) При любых возможных c_i, x_k при подстановке в систему (1) обращает её в тождество
   (b) В области, где выполняются условия теоремы существования и единственности задачи Коши для всех возможных c_i любая задача Коши решается.
8. Геометрический и физизечский смысл системы $\begin{cases} \dot{x_1} = f_1(t, x_1, x_2) \\ \dot{x_2} = f_2(t, x_1, x_2) \end{cases}$
   (a) Геометрический смысл: описание кривой в трехмерном пространстве
      i. Фазовая кривая — проекция интегральной кривой на фазовую плоскость (x_1, x_2)
   (b) Механический смысл: Вектор скорости точки, движущейся в трехмерном пространстве
9. Пример: Построить фазовые кривые системы $\begin{cases} \dot{x} = y & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = -x & y(0) = y_0 \end{cases}$
   (a) $\ddot{x} = \dot{y} = -x$
   (b) $\lambda^2 + 1 = 0$; $\lambda = \pm i$

(c) $\begin{cases} x = c_1 \cos t + c_2 \sin t & c_1 = x_0 \\ y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t & c_2 = y_0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x = x_0 \cos t + y_0 \sin t \\ y = -x_0 \sin t + +y_0 \cos t \end{cases}$

(e) $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2$ — окружность

3.1 Метод исключения неизвестной (сведение к д.у. n-го порядка)

1. $x^{(n)} = f(t, x, x', x'', ..., x^{(n-1)})$
2. $x' = x_1$, $x'' = x_2$, ..., $x^{(n-1)} = x_{n-1}$
3. $\begin{cases} x' = x_1 \\ x_1' = x_2 \\ ... \\ x_{n-1}' = f(t, x_1, ..., x_{n-1}) \end{cases}$
4. Из уравнения мы можем получить систему и наоборот.
5. $\begin{cases} x' = ax + by + f(t) \\ y' = cx + dy + g(t) \end{cases}$
6. $y = \frac{1}{b}(x' - ax - f(t))$; $y' = \frac{1}{b}(x'' - ax' - f'(t))$
7. $x'' - ax' - f'(t) = b(cx + \frac{d}{b}(x' - ax - f(t)) + g(t))$
8. $x'' + Ax' + Bx = \varphi(t)$
9. Пример: $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$
   (a) $y = x' - 1 \Rightarrow y' = x''$
   (b) $x'' - x = 1$
   (c) $\lambda^2 - 1 = 0$; $\lambda = \pm 1$
   (d) $x_{\text{оо}} = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$
   (e) $f(t) = 1$
   (f) $x_{\text{ч}} = A$; $x' = 0$; $x'' = 0 \Rightarrow -A = 1 \Rightarrow A = -1$
   (g) $\begin{cases} x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - 1 \\ y = c_1 e^t - c_2 e^{-t} - 1 \end{cases}$ — общее решение системы
10. Пример: $\begin{cases} x' = 3x + 8y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$; $\begin{cases} x(0) = 6 \\ y(0) = -2 \end{cases}$
    (a) $x' = -y'' - 3y'$
    (b) $-y'' - 3y' = -3y' - 9y + 8y$
    (c) $y'' - y = 0$; $\lambda^2 - 1 = 0$; $\lambda = \pm 1$; $y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$
    (d) $x = -(c_1 e^t - c_2 e^{-t}) - 3c_1 e^t - 3c_2 e^{-t}$
    (e) $\begin{cases} x = -4c_1 e^t - 2c_2 e^{-t} \\ y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \end{cases}$ — общее решение
    (f) Задача Коши:

i. $\begin{cases} 6 = -4c_1 - 2c_2 \\ -2 = c_1 + c_2 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = -1 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} x = 4e^t + 2e^t \\ y = -e^t - e^{-t} \end{cases}$

11. Пример: $\begin{cases} tx' = -x + yt \\ t^2y' = -2x + yt \end{cases}$

(a) $\begin{cases} y = x' + \frac{x}{t} \\ x'' + t^2x't - x = -2x + (x' + \frac{x}{t})t \end{cases}$ $\quad y' = x'' + \frac{x't - x}{t^2}$

(b) $t^2x'' + x't - x = -2x + x't + x$

(c) $x''t = 0$; $x'' = 0$; $x' = c_1$

(d) $\begin{cases} x = c_1t + c_2 \\ y = c_1 + c_1 + \frac{c_2}{t} = 2c_1 + \frac{c_2}{t} \end{cases}$

3.2 Метод нахождения интегрируемых комбинаций

1. Пример: $\begin{cases} y' = \frac{z}{(y-z)^2} \\ z' = \frac{y}{(y-z)^2} \end{cases}$

(a) $\frac{y'}{z'} = \frac{z}{y}$

(b) $\frac{dy}{dz} = \frac{z}{y}$

(c) $ydy = zdz$

(d) $\frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{2} + c$

(e) $y^2 - z^2 = c$

(f) $y' - z = -\frac{1}{y-z}$; $(y - z)'_t = -\frac{1}{y-z}$

(g) $\begin{cases} y^2 - z^2 = c_1 \\ (y - z)^2 = c_2t + c_3 \end{cases}$; $\begin{cases} y - z = u \\ y + z = v \end{cases}$

Часть XV

Лекция 10 (11.11.15) $\ddot{\omega}$

3.3 Линейные системы дифференциальный уравнений

1. $\begin{cases} \dot{x_1} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + ... + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dot{x_2} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + ... + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ ... \\ \dot{x_n} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + ... + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$

2. $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$

3. $A = ||a_{ij}(t)||$, $i, j = 1, 2, ..., n$

4. $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

5. $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ ... \\ \dot{x_n} \end{pmatrix}$

6. $f = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ ... \\ f_n(t) \end{pmatrix}$

7. $\frac{dx}{dt} = AX + f$

8. $f = 0$; $\frac{dx}{dt} = AX$ — **однородная линейная система**

9. Определение: Столбец $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ ... \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ является **частным решением** системы $\dot{X} = AX$, если $\frac{dy}{dt} = AY$ $\forall t \in (a, b)$

10. Теорема: Частные решения системы $\dot{X} = AX$ составляют линейное пространство.
    (a) Пусть:
        i. $Y(t)$ и $Z(t)$ — решения
    (b) Тогда:
        i. $\frac{d(Y+Z)}{dt} = \frac{dY}{dt} + \frac{dZ}{dt} = AY + AZ = A(Y + Z) \Rightarrow Y + Z$ — решение
        ii. $\frac{d(\lambda y)}{dt} = \lambda AY = A(\lambda y)$

11. Определение: Если $\{X_i(t)\}_{i=1}^n$ — частное решение системы $\dot{X} = AX$, тогда $\{X_i(t)\}$ — фундаментальная система решений, если $\{X_i(t)\}_{i=1}^n$ — линейно независимая система или $W_{X_1,...,X_n} \neq 0$ (определитель Вронского).

12. Теорема (структура общего решения однородной системы)
    (a) Пусть:
        i. $\{X_i\}_{i=1}^n$ — фундаменталльная система решений $\dot{X} = AX$
    (b) Тогда:
        i. $\sum C_i X_i$ — тоже решение системы $\forall C_i$ и наоборот

13. $f \neq 0$, $\frac{dx}{dt} = AX + f$ — неоднородная система

14. Определение: $Y(t)$ — общее решение системы $\dot{X} = AX + f$, если $\frac{dY}{dt} = AY + f(t)$ $\forall t \in (a, b)$

15. Теорема (структура общего решения неоднородных систем)
    (a) Пусть:
        i. $\{X_i\}_{i=1}^n$ — фундаментальная система решений $\dot{X} = AX$
    (b) Тогда:
        i. $X_{\text{он}} = \sum_{i=1}^n C_i X_i + Z_{\text{чр}}$
        ii. Общее решение неоднородной системы состоит из суммы общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы.
    (c) Доказательство:
        i. Пусть:
            A. $Y(t)$ и $Z(t)$ — решения системы $\dot{X} = AX + f$
        ii. Тогда:
            A. Покажем, что $Y - Z$ является решением однородной системы $\dot{X} = AX$
            B. $\frac{d(Y-Z)}{dt} = \frac{dY}{dt} - \frac{dZ}{dt} = AY + f - AZ - f = A(Y - Z)$ — верно
            C. $Y - Z = \sum_{i=1}^n C_i X_i \Rightarrow Y(t) = \sum_{i=1}^n C_i X_i + Z(t)$

3.4 Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

3.4.1 Метод Эйлера

1. $\begin{cases} \dot{x} = a_1x + b_1y + c_1z \\ \dot{y} = a_2x + b_2y + c_2z \\ \dot{z} = a_3x + b_3y + c_3z \end{cases}$

   (a) $a_i, b_i, c_i = const$

2. $x = pe^{\lambda t}$; $y = qe^{\lambda t}$; $z = re^{\lambda t}$

3. $\begin{cases} \lambda pe^{\lambda t} = a_1pe^{\lambda t} + b_1qe^{\lambda t} + c_1re^{\lambda t} \\ \lambda qe^{\lambda t} = a_2pe^{\lambda t} + b_2qe^{\lambda t} + c_2re^{\lambda t} \\ \lambda re^{\lambda t} = a_3pe^{\lambda t} + b_3qe^{\lambda t} + c_3re^{\lambda t} \end{cases}$

4. $\begin{cases} \lambda p = a_1p + b_1q + c_1r \\ \lambda q = a_2p + b_2q + c_2r \\ \lambda r = a_3p + b_3q + c_3r \end{cases}$

5. $\begin{vmatrix} a_1-\lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2-\lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ - система имеет нетривиальное решение, если определитель равен нулю

6. Решения характеристического уравнения: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

7. Для λ_i находим $\begin{pmatrix} p_i \\ q_i \\ r_i \end{pmatrix}$. Тогда решение системы будет записываться в виде: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \\ r_2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} p_3 \\ q_3 \\ r_3 \end{pmatrix}$ (если все $\lambda_i \in R$ и они различные)

8. Пример: $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 8y \\ \dot{y} = -x + 5y \end{cases}$

   (a) $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -8 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$ — характеристическое уравнение

   (b) $15 - 8\lambda + \lambda^2 - 8 = 0$; $\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$; $\lambda = 1; 7$

   (c) $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $p = 4q$; $c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\lambda = 4$: $\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $p = -2q$; $c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (e) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}$

   (f) $\begin{cases} x = 4c_1e^t - 2c_2e^{7t} \\ y = c_1e^t + c_2e^{7t} \end{cases}$

9. λ — комплексные корни

   (a) $\begin{cases} \dot{x} = x - 5y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$

      i. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

      ii. $-1 + \lambda^2 + 10 = 0$; $\lambda = \pm 3i$

iii. $\lambda = 3i$: $\begin{pmatrix} 1-3i & -5 \\ 2 & -1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix}$

iv. $\lambda = -3i$: $\begin{pmatrix} 1+3i & -5 \\ 2 & -1+3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1+3i \end{pmatrix}$

v. $X_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix} e^{3it}$; $X_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1+3i \end{pmatrix} e^{-3it}$

vi. $\Theta_1 = \frac{X_1+X_2}{2} = \begin{pmatrix} \frac{5e^{3it}+5e^{-3it}}{2} \\ \frac{1-3i}{2}e^{3it} + \frac{1+3i}{2}e^{-3it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix}$

vii. $\Theta_2 = \frac{X_1-X_2}{2} = \begin{pmatrix} \frac{5e^{3it}-5e^{-3it}}{2i} \\ \frac{1-3i}{2i}e^{3it} - \frac{1+3i}{2i}e^{-3it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}$

viii. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ \sin 3t - 5\cos 3t \end{pmatrix}$

ix. $\begin{cases} x = 5c_1 \cos 3t + 5c_2 \sin 3t \\ y = (c_1 - 5c_2)\cos 3t + (3c_1 + c_2)\sin 3t \end{cases}$

10. λ — кратные корни

(a) $X = (A + Bt)e^{\lambda t}$, $Y = (C + Dt)e^{\lambda t}$

(b) $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$

i. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

ii. $(1-\lambda)^2 = 0$; $\lambda_{1,2} = 1$

iii. $\begin{cases} \dot{x} = Be^t(A + Bt)e^t \\ \dot{y} = De^t + (C + Dt)e^t \end{cases}$

iv. $\begin{cases} Be^t + Ae^t + Bte^t = Ae^t + Bte^t \\ De^t + Ce^t + Dte^t = 2Ae^t + 2Bte^t + Ce^t + Dte^t \end{cases}$

v. $\begin{cases} A + B = A & \Rightarrow B = 0 \\ B = B & \\ D + C = 2A + C & \Rightarrow D = 2A;\ C - \text{любое} \\ D = D & \end{cases}$

vi. $\begin{cases} x = Ae^t \\ y = (C + 2At)e^t \end{cases}$

vii. $\begin{cases} x = c_1 e^t \\ y = c_2 e^t + 2c_1 te^t \end{cases}$

Часть XVI

Лекция 11 (18.11.15)

4 Операционное исчисление. Преобразование Лапласа

1. Определение: Функция $f(t)$ (может быть комплекснозначной) называется **оригиналом**, если:

   (a) $f(t) \equiv 0$; $t < 0$

   (b) $f(t)$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода на любом конечном интервале (интегрируемая)

   (c) $\exists M > 0, S_o \geq t : |f(t)| \leq Me^{S_0 t}$

i. S_0 — показатель роста

2. Примеры оригиналов:

   (a) $\eta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ — функция Хевисайда

   (b) $f(t) = \begin{cases} e^{3t} \sin 2t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

      i. $f(t) = e^{3t} \sin 2t \cdot \eta(t)$

   (c) $f(t) = e^{t^2} \eta(t)$ не является оригиналом (растет быстрее e^t)

3. Свойства оригиналов: Если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — оригиналы, то:

   (a) $f_1 + f_2$ — оригинал

   (b) $f_1 \cdot f_2$ — оригинал

4. Определение: Функция комплексного переменного $F(p)$ называется **изображением** оригинала $f(t)$, если $F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$ $(p = \alpha + i\beta)$

5. Теорема (существования изображений): Для оригинала $f(t)$ существует изображение $F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ в полуплоскости $Re\, p = \alpha > S_0$, где S_0 — показатель роста $f(t)$.

   (a) Следствие: Если $F(p)$ — изображение, то $\lim\limits_{p \to \infty} F(p) = 0$

6. Теорема (о единственности оригинала): Если $F(p)$ — изображение функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то $f_1(t) = f_2(t)$.

   (a) $f(t) \risingdotseq F(p)$, $F(p) \fallingdotseq f(t)$

7. Преобразование Лапласа — нахождение изображения по заданному оригиналу.

8. Пример:

   (a) $f(t) = e^{at}$; $F(p) = \int_0^\infty e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-(p-a)t} dt = -\frac{1}{p-a} e^{-(p-a)t}|_0^\infty = \frac{1}{p-a}$

      i. $e^{at} \risingdotseq \frac{1}{p-a}$

      ii. $a = 0$: $1 = \eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$

9. Свойства преобразования Лапласа

   (a) Линейность: Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$. Тогда $c_1 f(t) + c_2 g(t) \risingdotseq c_1 F(p) + c_2 G(p)$

      i. $f(t) = ch\, t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{-t} \risingdotseq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2p}{p^2 - t}$

   (b) Подобие: Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $f(at) \risingdotseq \frac{1}{a} F(\frac{p}{a})$; $a > 0$

      i. $f(at) \risingdotseq \int_0^\infty f(at) e^{-pt} dt = \begin{vmatrix} at = u \\ t = \frac{u}{a} \\ dt = \frac{1}{a} du \end{vmatrix} = \frac{1}{a} \int_0^\infty f(u) e^{-\frac{p}{a} u} du = \frac{1}{a} F(\frac{p}{a})$

      ii. $f(t) = \cos t$; $F(p) = \int_0^\infty \cos t \cdot e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \int_0^\infty \cos t \cdot d(e^{-pt}) =$
      $= -\frac{1}{p}(\cos t \cdot e^{-pt}|_0^\infty + \int_0^\infty \sin t \cdot e^{-pt} dt = ...$

   (c) Смещения: Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $e^{at} f(t) \risingdotseq F(p - a)$

      i. $e^{at} f(t) \risingdotseq \int_0^\infty f(t) e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p - a)$

      ii. $e^{at} \cos bt \risingdotseq \frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}$

      iii. $e^{at} \sin bt \risingdotseq \frac{b}{(p-a)^2 + b^2}$

   (d) Запаздывание: Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $f(t - \tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p)$

i. $f_1(t) = \begin{cases} f(t) & t \in (0,T) \\ 0 & t \notin (0,T) \end{cases}$

ii. $f_1(t) \risingdotseq F_1(p) = \int_0^T f(t)e^{-pt}dt$

iii. $f_2(t) = f_1(t-T)$

iv. $f_3(t) = f_1(t-2T)$

v. $f(t) = f_1 + f_2 + ...$

vi. $F(p) = \frac{1}{1-e^{-pt}}F_1(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(t)e^{-pt}dt$

(e) Дифференцирование изображений: Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $F'(p) \fallingdotseq -t \cdot f(t)$, $F''(p) \fallingdotseq t^2 f(t)$, $F^{(n)}(p) \fallingdotseq (-1)^n t^n f(t)$

i. $te^{at} \risingdotseq -(\frac{1}{p-a})' = \frac{1}{(p-a)^2}$

ii. $t^2 e^{at} \risingdotseq -(\frac{1}{(p-a)^2})' = \frac{2}{(p-a)^3}$

iii. $t^n e^{at} \risingdotseq \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$

A. $a = 0$: $t^n = \frac{n!}{p^{n+1}}$

(f) Дифференцирование оригинала: $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$; $f''(t) = p^2F(p) - pf(0) \cdot f'(0)$; $f^{(n)}(t) = p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0)... - f'^{(n-1)}(0)$

(g) Интегрирование оригинала: Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\int_0^t f(t)dt \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$

(h) Интегрирование изображения: Если $\int_p^\infty F(z)dz$ сходится, то $\int_p^\infty F(z)dz \fallingdotseq \frac{f(t)}{t}$

i. $f(t) = \frac{sh2t}{t}$

A. $sh2t = \frac{2}{p^2-4}$

B. $\frac{sh2t}{t} = \int_p^\infty \frac{2}{z^2-4}dz = \frac{2}{4}\ln|\frac{z-2}{z+2}||_p^\infty = -\frac{1}{2}\ln|\frac{p-2}{p+2}|$

(i) Лемма Бореля: $F(p)G(p) \fallingdotseq f * g$ (свертка) $= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

i. $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p^2+1}$

ii. $f(t) = \int_0^t (t-\tau)\sin\tau\, d\tau = \begin{vmatrix} t-\tau = u \\ d\tau = du \\ \sin\tau\, d\tau = dv \\ v = -\cos\tau \end{vmatrix} = -(t-\tau)\cos\tau|_0^t - \int_0^t \cos\tau\, d\tau = t - \sin t$

(j) Теорема Дюамеля: $pF(p)G(p) \fallingdotseq f'(t) \cdot g(t) + f(0)g(t) = g'(t) \cdot f(t) + g(0)f(t) = (f * g)'$

i. $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$

10. Таблица оригиналов и изображений:

(a)

Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
c	$\frac{c}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$sh\, at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$ch\, at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$
$e^{at}\cos bt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$

11. Примеры:

(a) $f(t) = \cos^2 3t + 5e^{-2t} + 3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6t + 5e^{-2t}$

i. $F(p) = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2+36} + 5\frac{1}{p+2}$

(b) $f(t) = te^{4t} \sin 3t$

i. $\sin 3t \risingdotseq \frac{3}{p^2+9}$

ii. По пятому свойству: $t \sin 3t \risingdotseq -(\frac{3}{p^2+9})' = 6p(p^2+9)^2 = \frac{6p}{(p^2+9)^2}$

iii. По третьему свойству: $e^{4t} t \sin 3t \risingdotseq \frac{6(p-4)}{((p-4)^2+9)^2}$

Часть XVII

Семинар 10 (25.11.15)

1. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 3y + 32 & x(0) = -1 \\ \dot{y} = x + 5y & y(0) = 1 \end{cases}$

   (a) Стандартным методом: $\begin{cases} x = 3e^{8t} + e^{4t} - 5 \\ y = e^{86} - e^{4t} + 1 \end{cases}$

Часть XVIII

Лекция 12 (25.11.15)

1. Примеры: По заданному изображения $F(p)$ восстановить оригинал $f(t)$

   (a) $F(p) = \frac{2p-1}{p^2+5p+6} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p+3} = \frac{-5}{p+2} + \frac{7}{p+3}$

   i. $A(p+3) + B(p+2) = 2p - 1$

   A. $p = -3$: $B = 7$

   B. $p = -2$: $A = -5$

   ii. $f(t) = 5e^{-2t} + 7e^{-3t}$

   (b) $F(p) = \frac{-3p+4}{p^2+6p+13} = \frac{-3p+4}{(p+3)^2+4} = \frac{-3(p+3)+13}{(p+3)^2+4} = -3\frac{p+3}{(p+3)^2+4} + \frac{13}{2} \cdot \frac{2}{(p+3)^2+4}$

   i. Дискриминант меньше нуля $\Rightarrow$ выделяем полный квадрат

   ii. $f(t) = -3e^{-3t} \cos 2t + \frac{13}{2} e^{-3t} \sin 2t$

4.1 Решение дифференциальных уравнений

1. Пусть:

   (a) $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(t)$

   (b) $y(0) = c_1, ..., y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$

   (c) $f(t), y(t), ..., y^{(n)}(t)$ — оригиналы

2. Тогда:

   (a) $L[L_n[y]] = L[f(t)]$, $L[]$ — изображение

   (b) $f(t) \risingdotseq F(p)$; $y(t) \risingdotseq \overline{y}$

   (c) $\overline{y} = \frac{F(p) - R_{n-1}(p)}{Q_n(p)}$

3. Примеры:

   (a) $y'' + 3y' = e^{-3t}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = -1$

   i. $L(y'' + 3y') = L(e^{-3t})$

A. $L(y) = \overline{y}$
B. $L(y') = p\overline{y} - y(0) = p\overline{y}$
C. $L(y'') = p^2\overline{y} - py(0) - y'(0) = p^2\overline{y} + 1$
D. $L(e^{-3t}) = \frac{1}{p+3}$

ii. $p^2\overline{y} + 1 + 3p\overline{y} = \frac{1}{p+3}$
A. $\overline{y}(p^2 + 3p) = \frac{1}{p+3} - 1$
B. $\overline{y} = \frac{1-p-3}{(p+3)(p^2+3p)} = \frac{-p-2}{(p+3)^2 p} = -\frac{2}{9p} + \frac{2}{9(p+3)} - \frac{1}{3(p+3)^2}$

iii. $y = -\frac{2}{9} + \frac{2}{9}e^{-3t} - \frac{1}{3}te^{-3t}$

(b) $y'' + y = 2$; $y(0) = 2$; $y'(0) = -1$
i. $L(y'' + y) = L(2)$
A. $L(y) = \overline{y}$
B. $L(y') = p\overline{y} - y(0) = p\overline{y} - 2$
C. $L(y'') = p^2\overline{y} - py(o) - y'(0) = p^2\overline{y} - 2p + 1$
D. $L(2) = \frac{2}{p}$

ii. $p^2\overline{y} - 2p + 1 + \overline{y} = \frac{2}{p}$
A. $\overline{y}(p^2 + 1) = \frac{2}{p} + 2p - 1$
B. $\overline{y}(p^2 + 1) = \frac{2+2p^2-p}{p}$
C. $\overline{y} = \frac{2p^2-p+2}{p(p^2+1)} = \frac{2}{p} + \frac{-1}{p^2+1}$

iii. $y = 2 - \sin t$

4.2 Решение систем уравнений

1. Пусть:

(a) $\dot{X} = AX + f(t)$; $\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ ... \\ \dot{x_2} \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$; $f(t) = \begin{pmatrix} f_1 \\ ... \\ f_n \end{pmatrix}$

2. Тогда:

(a) $\alpha(\dot{X}) = \alpha(AX) + \alpha(f(t))$
(b) $p\overline{X} - X(0) = A\overline{X} + F$
(c) $(pE - A)\overline{X} = F + X(0)$
(d) $\overline{X} = (pE - A)^{-1}(F + X(0))$

3. Примеры:

(a) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = -2x - 2y - e^t \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 4 \\ y(0) = -4 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha(\dot{x}) = p\overline{x} - x(0) \\ \alpha(\dot{y}) = p\overline{y} - y(0) \end{cases}$

i. $\begin{cases} p\overline{x} - 4 = 3\overline{x} + 2\overline{y} \\ p\overline{y} + 4 = -2\overline{x} - 2\overline{y} - \frac{1}{p-1} \end{cases}$

ii. $\begin{cases} (p-3)\overline{x} - 2\overline{y} = 4 \\ 2\overline{x} + (p+2)\overline{y} = -4 - \frac{1}{p-1} \end{cases}$

A. $\Delta = \begin{vmatrix} p-3 & -2 \\ 2 & p+2 \end{vmatrix} = p^2 - p - 6 + 4 = p^2 - p - 2 = (p-2)(p+1)$
B. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -4 - \frac{1}{p-1} & p+2 \end{vmatrix} = 4p + 8 - 8 - \frac{2}{p-1} = \frac{4p^2-4p-2}{p-1}$
C. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} p-3 & 4 \\ 2 & -4 - \frac{1}{p-1} \end{vmatrix} = -4(p-3) - \frac{p-3}{p-1} - 8 = \frac{-4p^2+7p-1}{p-1}$

iii. $\begin{cases}\overline{x} = \frac{4p^2-4p-2}{(p-1)(p-2)(p+1)} = \frac{2}{p-1} + \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p+1}\\ \overline{y} = \frac{-4p^2+7p-1}{(p-1)(p-2)(p+1)} = -\frac{1}{p-1} - \frac{2}{p-2} - \frac{1}{p+1}\end{cases}$

iv. $\begin{cases}x = & e^t + 2e^{2t} + e^{-t}\\ y = & -e^t - e^{2t} - 2e^{-t}\end{cases}$

Контрольная работа №2

1. Три линейных неоднородных уравнения с постоянными коэффициентами
   (a) Два на метод подбора
   (b) Один на метод вариации постоянной
2. Метод Эйлера
3. Система д.у.
4. Решить уравнение операторным методом (4.3)

Часть XIX

Семинар 11 (9.12.15)

1. $\begin{cases}\dot{x} = 2x + y & x(0) = -1\\ \dot{y} = 3x + 4y & y(0) = 9\end{cases}$
   (a) $\begin{cases}pX + 1 = 2X + Y\\ pY - 9 = 3X + 4Y\end{cases}$
   (b) $\begin{cases}X(p-2) - Y = -1\\ -3X + Y(p-4) = 9\end{cases}$
   (c) $\begin{cases}X = \frac{-p+13}{(p-1)(p-5)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-5} = -3\frac{1}{p-1} + 2\frac{1}{p+5}\\ Y = \frac{9p-21}{(p-1)(p-5)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-5} = 3\frac{1}{p-1} + 6\frac{1}{p+5}\end{cases}$
   (d) $\begin{cases}x = -3e^t + 2e^{5t}\\ y = 3e^t + 6e^{5t}\end{cases}$