Информация о семестре

Темы семестра:

1. Неопределенный и определенный интеграл
2. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы
3. Теории скалярных и векторных полей

- По первым двум темам - контрольные
- По третьей части - типовой расчет

Литература:

1. Типовой расчет с официального сайта кафедры

Part I

Лекция 1 (14.02.15) "Первообразная. Неопределенный интеграл."

1 Первообразная. Неопределенный интеграл.

1. Задача интегрирования состоит в нахождении функции по её известной производной.
2. Определение: Функция F(x) называется **первообразной** для функции f(x) на интервале (a, b), если функция F(x) дифференцируема на этом интервале и $F'(x) = f(x)$.
   (a) Пусть:
      i. $f(x) = \sin x$
   (b) Тогда:
      i. $F(x) = -\cos x$
      ii. $F_1(x) = -\cos x + 5$
      iii. $F(x), F_1(x)$ - первообразные для функции $f(x)$.
      iv. Если функции $F(x)$ и $F_1(x)$ - первообразные функции $f(x)$, то $F_1(x) = F(x) + C$. Таким образом множество всех первообразных функции $f(x)$ определяется формулой $F(x) + C$, где $F(x)$ - одна из первообразных функции $f(x)$, а C - произвольная постоянная.

3. Определение: Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется её **неопределенным интегралом**.
   Обозначается $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$, где x - переменная интегрирования, $\displaystyle\int$ - знак интеграла, $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение.

4. Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b), то на этом интервале существует неопределенный интеграл этой функции.

5. Неопределенный интеграл не для всех элементарных функций выражается в виде комбинации элементарных функций.

1.1 Таблица неопределенных интегралов

#	$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)$
1	c	0	
2	u	$nu^{n-1} \cdot u'$	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c\ (n! = -1)$
3	e^u	$e^u \cdot u'$	$\int e^u du = e^u + c$
4	a^n	$a^u \ln(a) \cdot u'$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
5	$\ln u$	$\frac{1}{u} \cdot u'$	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + c$
6	$\sin u$	$\cos u \cdot u'$	$\int \sin u \cdot du = -\cos u + c$
7	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$	$\int \cos u \cdot du = \sin u + c$
8	$\log_a u$	$\frac{1}{u \ln a} \cdot u'$	
9	$\operatorname{tg} u$	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + c$
10	$\operatorname{ctg} u$	$\frac{1}{\sin^2 u} u'$	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + c$
11	$\arcsin u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c$
12	$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\arccos u + c$
13	$\operatorname{arctg} u$	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + c$
14	$\operatorname{arcctg} u$	$-\frac{u'}{1+u^2}$	$\int \frac{du}{1+u^2} = -\operatorname{arcctg} u + c$
15			$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha}} = \ln\lvert u + \sqrt{u^2+\alpha}\rvert + c$
16			$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2} \ln\lvert\frac{a+u}{a-u}\rvert + c$
17			$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\lvert\frac{u-a}{u+a}\rvert + c$
18			$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c$
19			$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-b^2u^2}}$
20			$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c$
21			$\int \frac{du}{a^2+b^2u^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{bu}{a} + c$
22	$\operatorname{sh} u$	$\operatorname{ch} u \cdot u'$	$\int \operatorname{ch} u \cdot du$
23	$\operatorname{ch} u$	$\operatorname{sh} u \cdot u'$	$\int \operatorname{sh} u \cdot du$

1.1.1 Проверка некоторых интегралов

1. $\ln|x| = \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases}$

(a) $x>0$: $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

(b) $x<0$: $(\ln(-x))'=\dfrac{1}{-x}(-1)=\dfrac{1}{x}$

2. $(\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a})'=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}\cdot\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{a^2+x^2}$

3. $(\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|)'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}})=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

4. $(\ln|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}|)'=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{\sin x}$

5. 20: $\cos x=\sin(x+\dfrac{\pi}{2})$

1.2 Свойства неопределенного интеграла

$\int f(x)dx=F(x)+C\iff F'(x)=f(x)$

1. $(\int f(x)dx)'=f(x)$

2. $d(\int f(x)dx)=f(x)dx$

3. $\int F'(x)dx=F(x)+C$

4. $\int(a\cdot f(x)+b\cdot g(x))dx=a\int f(x)dx+b\int g(x)dx$

5. Если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(ax+b)dx=\dfrac{1}{a}F(ax+b)+C$

1.3 Примеры на табличное интегрирование

1. $\int(5\cos x-3\sin x)dx=5\sin x+3\cos x+C$

2. $\int\dfrac{2x^2+7}{x}dx=\int(2x+\dfrac{7}{x})dx=2\dfrac{x^2}{2}+7\ln|x|+C=x^2+7\ln|x|+C$

3. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{9}{4}}}=\dfrac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+\dfrac{9}{4}}|+C$

4. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{25-16x^2}}=\dfrac{1}{4}\int\dfrac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16}-x^2}}=\dfrac{1}{4}\arcsin\dfrac{4x}{5}+C$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x+3} = \frac{1}{4}\ln|4x+3|$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5}\cdot 2\sqrt{5x-2} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C$

1.4 Методы приведения интеграла к табличному виду

1.4.1 Замена переменной в неопределенном интеграле

1. Пусть:

   (a) F(t) - первообразная функции $f(t)$, то есть $\displaystyle\int f(t)dt = F(t) + C$

2. Тогда:

   (a) $F(\phi(x))$ - первообразная функции $f(\phi(x))\cdot\phi'(x)$

   (b) $(F(\phi(x)))' = f(\phi(x))\cdot\phi'(x)$

   (c) $\displaystyle\int F(\phi(x))\cdot\phi'(x)\cdot dx = F(\phi(x)) + C$

   (d) $\displaystyle\int f(\phi(x))\cdot\phi'(x)\cdot dx = [\phi(x) = t, \phi'(x)dx = dt]$
   $\displaystyle\int f(t)dt = F(t) + C = F(\phi(x)) + C$

3. Примеры:

   (a) $\displaystyle\int x\cdot e^{-3x^2}dx = [-3x^2 = t, -6x\cdot dx = dt, xdx = -\frac{1}{6}dt]$
   $\displaystyle\int e^t(-\frac{1}{6}dt) = -\frac{1}{6}\int e^t dt = -\frac{1}{6}e^t + C = -\frac{1}{6}e^{-3x^2} + C$

   (b) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}dx = [\ln x = t, \frac{dx}{x} = dt] = \int t\cdot dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$

   (c) 19: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}$
   $\displaystyle[\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = dt] = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C$

1.4.2 Метод интегрирования по частям (основано на производной произведения)

1. Пусть:

   (a) $(u\cdot v)' = u'v + uv'$

2. Тогда:

(a) $d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv$

(b) $\int d(uv) = \int v \cdot du + \int u \cdot dv$

(c) $uv = \int v \cdot du + \int u \cdot dv$

(d) $\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$ - формула интегрирования по частям

3. Примеры:

(a) $\int x \sin x \cdot dx = [u = x, dv = \sin x \cdot dx, du = dx, v = -\cos x]$

$-x \cos x + \int \cos x \cdot dx = -x \cos x + \sin x + C$

(b) $\int x \ln x \cdot dx = [u = \ln x, dv = xdx, du = \dfrac{dx}{x}, v = \dfrac{x^2}{2}]$

$\dfrac{x^2}{2} \ln x - \int \dfrac{x^2}{2} \cdot \dfrac{dx}{x} = \dfrac{x^2}{2} \ln x - \int \dfrac{x}{2} dx = \dfrac{x^2}{2} \ln x - \dfrac{x^2}{4} + C$

(c) $\int (x^2 + 4)e^{-x} dx = [u = x^2 + 4, dv = e^{-x} dx, du = 2x \cdot dx, v = -e^{-x}]$

$-(x^2 + 4)e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx = [u = x, dv = e^{-x} dx, du = dx, v = -e^{-x}]$

$-(x^2 + 4)e^{-x} + 2(-xe^{-x} + \int e^{-x} dx) = -(x^2 + 4)e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$

$-(x^2 + 4 + 2x + 2)e^{-x} + C = -(x^2 + 2x + 6)e^{-x} + C$

Проверка: $(-(x^2 + 2x + 6)e^{-x})' = -(2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 6)(-e^{-x})$

$e^{-x}(-2x - 2 + x^2 + 2x + 6) = e^{-x}(x^2 + 4)$

(d) $\int e^{-2x} \cos 3x \cdot dx = [u = e^{-2x}, dv = \cos 3x \cdot dx, du = -2e^{-2x} dx, v = \dfrac{1}{3} \sin 3x]$

$\dfrac{1}{3} e^{-2x} \sin 3x + \dfrac{2}{3} \int e^{-2x} \sin 3x \cdot dx$

$[u = e^{-2x}, dv = \sin 3x \cdot dx, du = -2e^{-2x} dx, v = -\dfrac{1}{3} \cos 3x]$

$\dfrac{1}{3} e^{-2x} \sin 3x + \dfrac{2}{3}(-\dfrac{1}{3} e^{-2x} \cos 3x - \dfrac{2}{3} \int e^{-2x} \cos 3x \cdot dx)$ - циклический интеграл

$I = \int e^{-2x} \cos 3x \cdot dx = \dfrac{1}{3} e^{-2x} \sin 3x - \dfrac{2}{9} e^{-2x} \cos 3x - \dfrac{4}{9} I$

$\dfrac{13}{9} I = \dfrac{e^{-2x}}{9}(3 \sin 3x - 2 \cos 3x)$

$I = \dfrac{e^{-2x}}{13}(3 \sin 3x - 2 \cos 3x) + C$

Part II
Лекция 2 (21.02.15) “Интегрирование рациональных функций”

1.5 Интегрирование простых дробей

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$

2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = A\frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1} + C = -\frac{A}{(k-1)(x-1)^{k-1}}$

3. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = [a] = \int \frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{t^2+h^2}dt = \int \frac{At+(B-\frac{Ap}{2})}{t^2+h^2}dt =$
   $\displaystyle= [B - \frac{Ap}{2} = M] = A\int \frac{t}{t^2+h^2}dt + M\int \frac{dt}{t^2+h^2}dt =$
   $\displaystyle= \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2-h^2)}{t^2+h^2} + \frac{M}{A}\operatorname{arctg}\frac{t}{h} + C = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{B-\frac{Ap}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}}$

   (a) $x^2+px+q = x^2+2x\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4} = (x+\frac{p}{2})^2+h^2 = t^2+h^2$

      i. $t = x+\frac{p}{2}$, $x = t-\frac{p}{2}$

         A. $dt = dx$

      ii. $h^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$

4. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = [3.a] = \int \frac{At+M}{(t^2+h^2)^k}dt = \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2+h^2)}{(t^2+h^2)^k} + M\int \frac{dt}{(t^2+h^2)^k} =$
   $\displaystyle= \frac{A}{2}\cdot\frac{1}{-k+1}\cdot\frac{1}{(t^2+h^2)^{k-1}} + M\int \frac{dt}{(t^2+h^2)^k} = -\frac{A}{2(k-1)(t^2+h^2)^{k-1}} + M\int \frac{dt}{(t^2+h^2)^k}$

1.6 Интегрирование рациональных функций

1. Рациональная дробь — дробь, числитель и знаменатель которой — многочлены.

   (a) $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x), Q_n(x)$ — многочлены степеней m и n соответственно.

2. Если степень числителя **меньше** степени знаменателя, то дробь **правильная**.

3. Неправильная дробь = многочлен · правильная дробь.

   (a) Многочлен интегрируется по таблице $\Longrightarrow$ интегрирование рациональной функции сводится к интегрированию правильной дроби.

   (b) Любую правильную дробь можно представить в виде суммы простых дробей.

4. Пусть $Q(x)$ — приведенный многочлен.

   (a) Любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в виде линейных и действительных множителей.

   (b) Если многочлен имеет простой действительный корень, то ему соответствует $(x-a)$.

1.6.1 Примеры

1. $\int \frac{x+7}{x^2-x-2}dx = [a] = \int (\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1})dx = 3\ln|x-2| - 2\ln|x+1| + C$

   (a) $\frac{x+7}{x^2-x-2} = \frac{x+7}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1}$

      i. $x+7 = A(x+1) + B(x-2)$
      ii. $x=2$: $9 = A \cdot 3$; $A = 3$
      iii. $x=-1$: $6 = -3B$; $B = -2$

2. $\int \frac{7x-11}{(x-3)^2(x+2)}dx = [a] = \int (\frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2} - \frac{1}{x+2})dx = \ln|x-3| - \frac{2}{x-3} - \ln|x+2| + C$

   (a) $\frac{7x-11}{(x-3)^2(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+2} = \frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2} - \frac{1}{x+2}$

      i. $7x-11 = A(x-3)(x+2) + B(x+2) + C(x-3)^2$
      ii. $x=-2$: $-25 = 25C$; $C = -1$
      iii. $x=3$: $10 = 5B$; $B = 2$
      iv. $x=0$: $-11 = -6A + 2B + 9C$; $A = 1$

3. $\int \frac{x^2-16x-4}{x^4-16}dx = [a] = \int (-\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} + \frac{2x+1}{x^2+4})dx =$
   $= -\ln|x^2-4| + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$

   (a) $\frac{x^2-16x-4}{x^4-16} = \frac{x^2-16x-4}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$

      i. $x^2-16x-4 = A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x-2)(x+2)$
      ii. $x=2$: $4-32-4 = 32A$; $A = -1$
      iii. $x=-2$: $4+32-4 = -32B$; $B = -1$

iv. x^3: $0 = A + B + C$; $C = 2$

v. x^0: $-4 = 8A - 8B - 4D$; $D = 1$

4. $\int \frac{x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 5}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx = \int (x - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{4}{(x+1)^3}) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + C$

Part III

Лекция 3 (28.02.15) “Интегрирование тригонометрических, гиперболических, иррациональных функций”

1.7 Интегрирование тригонометрических функций

1.7.1 Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$

1. Применяется универсальная тригонометрическая подстановка: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

   (a) $\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$

   (b) $\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

   (c) $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t,\ x = 2 \operatorname{arctg} x,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

2. Примеры:

   (a) $\int \frac{dx}{2 - \cos x} = [\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 - \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2(1+t^2) - (1-t^2)} =$
   $= \int \frac{2dt}{1+3t^2} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{\frac{1}{3} + t^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}t) + C = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}) + C$

   (b) $\int \frac{dx}{3 + 5\sin x} = [\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 + 5 \cdot \frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{3t^2 + 10t + 3} =$
   $3t^2 + 10t + 3 = 3(t+3)(t + \frac{1}{3}) = (t+3)(3t+1)$
   $\frac{2}{(t+3)(3t+1)} = \frac{A}{t+3} + \frac{B}{3t+1}$

$2 = A(3t+1) + B(t+3)$
$t = -3$: $2 = -8A$, $A = -\dfrac{1}{4}$
$t = -\dfrac{1}{3}$: $2 = \dfrac{8}{3}B$, $B = \dfrac{3}{4}$

$$= \int (-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t+3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3t+1})dt = -\frac{1}{4}\ln|t+3| + \frac{1}{4}\ln|3t+1| + C =$$
$$= \frac{1}{4}\ln|\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}| + C$$

3. Частный случай (когда универсальная тригонометрическая подстановка не нужна)

   (a) $\int R(\sin x)\cdot\cos x\cdot dx$ — $\sin x = t$

   (b) $\int R(\cos x)\cdot\sin x\cdot dx$ — $\cos x = t$

   (c) $\int R(\operatorname{tg} x)dx$ — $\operatorname{tg} x = t$

   (d) $\int R(\operatorname{ctg} x)dx$ — $\operatorname{ctg} x = t$

4. Примеры частных случаев:

   (a) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{2\sin x}{1+\sin^2 x}\cdot\cos x\cdot dx = [\sin x = t, \cos x\cdot dx = dt] =$
   $$= \int \frac{2tdt}{1+t^2} = \int \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} = \ln(1+\sin^2 x) + C$$

   (b) $\int \operatorname{tg}^3 x\cdot dx = [\operatorname{tg} x = t, x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2}] = \int \frac{t^3}{t^2+1}dt =$
   $$= \int (t - \frac{t}{t^2+1})dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x) + C$$

5. Основные тригонометрические тождества:

   (a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

   (b) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ — формулы понижения степени

6. Примеры на применение основных тригонометрических тождеств:

   (a) $\int \sin^4 x\cdot\cos^3 x\cdot dx = \int \sin^4 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos x\cdot dx = \int \sin^4 x\cdot(1-\sin^2 x)\cdot d(\sin x) =$
   $$= \int (\sin^4 x - \sin^6 x)\cdot d(\sin x) = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C$$

(b) $\int \cos^4 x \cdot dx = \int (\frac{1+\cos 2x}{2})^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}) =$
$= \frac{1}{4}\int (\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x)dx = \frac{1}{4}(\frac{3}{2}x + 2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x) + C =$
$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$

(c) $\int \sin 5x \cdot \cos 7x \cdot dx = \frac{1}{2}\int (\sin 12x - \sin 2x)dx = \frac{1}{2}(-\frac{1}{12}\cos 12x) - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}\cos 2x) + C =$
$= -\frac{1}{24}\cos 12x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

1.8 Интегрирование гиперболических функций

1. Определения гиперболических функций:

   (a) $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

   (b) $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

   (c) $thx = \frac{shx}{chx}$

   (d) $cthx = \frac{chx}{shx}$

2. Основные тождества гиперболических функций:

   (a) $ch^2x - sh^2x = 1$

   (b) $sh2x = 2shx \cdot chx$

   (c) $ch^2x + sh^2x = ch2x$

   (d) $ch^2x = \frac{ch2x + 1}{2}$

   (e) $sh^2x = \frac{ch2x - 1}{2}$

3. Примеры:

   (a) $\int ch^3x \cdot dx = \int ch^2x \cdot chx \cdot dx = \int (1 + sh^2x)d(shx) = shx + \frac{1}{3}sh^3x + C$

   (b) $\int sh^2x \cdot dx = \int \frac{ch2x - 1}{2}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}sh2x - \frac{1}{2}x + C = \frac{1}{4}sh2x - \frac{1}{2}x + C$

   (c) $\int \frac{dx}{sh^2x - 4ch^2x} = \int \frac{1}{\frac{sh^2x}{ch^2x} - 4}\cdot\frac{dx}{ch^2x} = \int \frac{1}{th^2 - 4}d(thx) = \frac{1}{4}\ln|\frac{thx - 2}{thx + 2}| + C$

1.9 Интегрирование иррациональных функций

1. Подстановки:

   (a) $\int R(x, \sqrt[n]{x})dx$ — $\sqrt[n]{x} = t$

   (b) $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ — $\sqrt[n]{ax+b} = t$

   (c) $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ — $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$

2. Примеры:

   (a) $$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}} = [\sqrt{x-1} = t, x-1 = t^2, x = t^2+1, dx = 2tdt] =$$
   $$= \int \frac{2tdt}{t^2+t+1} = \int \frac{2t+1}{t^2+t+1}dt - \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$
   $$= \ln(t^2+t+1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$
   $$= \ln(x+\sqrt{x-1}) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}} + C$$

   (b) $$\int \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \left| \begin{array}{c} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t \\ \frac{x-1}{x+1} = t^2 \\ x(1-t^2) = 1+t^2 \\ x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2}dt \end{array} \right| =$$
   $$= \int \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot t \cdot \frac{4t}{(1-t^2)^2dt} = \int \frac{4t^2}{(1+t^2)(1-t^2)}dt = \int (\frac{2}{1-t^2} - \frac{2}{1+t^2})dt =$$
   $$= \ln|\frac{1+t}{1-t}| - 2\operatorname{arctg} t + C, \text{ где } t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

1.9.1 Интегралы вида: $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

1. $$\int \frac{4x+7}{\sqrt{x^2+4x+6}}dx = \int \frac{2(2x-4)-1}{\sqrt{x^2+4x+6}}dx = 2\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+6}}dx - \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+2}} =$$
   $$= 4\sqrt{x^2+4x+6} - \ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+6}) + C$$

   (a) $$\int \frac{6x+11}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = \int \frac{-3(-2x-2)+5}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = -3\int \frac{d(-x^2-2x+3)}{\sqrt{3-2x-x^2}} + 5\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} =$$
   $$= -6\sqrt{3-2x-x^2} + 5\arcsin\frac{x+1}{2} + C$$

2. Тригонометрические и гиперболические подстановки:

(a) $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$ — $x = a \sin t$ или $x = a \cos t$

(b) $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$ — $x = a \operatorname{tg} t$ или $x = a \operatorname{sh} t$

(c) $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$ — $x = \dfrac{a}{\cos t}$ или $x = a \operatorname{ch} t$

3. Примеры:

(a) $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}}dx = [x = 3\sin t, \sin t = \dfrac{x}{3}, t = \arcsin \dfrac{x}{3}, \sqrt{9 - x^2} = 3\cos t, dx = 3\cos t \cdot dt] =$
$= \int \dfrac{9 \sin^2 t}{3 \cos t} \cdot 3 \cos t \cdot dt = 9 \int \sin^2 t \cdot dt = \dfrac{9}{2} \int (1 - \cos 2t)dt = \dfrac{9}{2}t - \dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \sin 2t + C =$
$= \dfrac{9}{2} \arcsin \dfrac{x}{3} - \dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{x}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{3} + C = \dfrac{9}{2} \arcsin \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{2}x\sqrt{9 - x^2} + C$

(b) $\int \sqrt{4 + x^2}dx = [x = 2 \operatorname{sh} t, dx = 2 \operatorname{ch} \cdot dt, \sqrt{4 + x^2} = 2 \operatorname{ch} t] =$
$= \int 2 \operatorname{ch} t \cdot 2 \operatorname{ch} t \cdot dt = 4 \int \operatorname{ch}^2 t \cdot dt = 2 \int (\operatorname{ch} 2t + 1)dt = \operatorname{sh} 2t + 2t + C = 2 \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t + 2t + C =$
$= [x = 2 \operatorname{sh} t = e^t - e^{-t}, xe^t = e^{2t} - 1, e^t = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}, t = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4} - \ln 2] =$
$= \dfrac{x}{2}\sqrt{4 + x^2} + 2\ln(x + \sqrt{x^2 + 4}) + C$

Part IV

Лекция 4 (7.03.15) “Определенный интеграл”

2 Определенный интеграл

2.1 Площадь криволинейной трапеции

1. Пусть:

(a) Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, $f(x) > 0$ для $\forall x \in [a, b]$. [161]

2. Тогда:

(a) Фигура, ограниченная графиком $y = f(x)$ и прямыми aA, bB называется криволинейной трапецией aABb.

(b) Поставим вопрос вычисления площади криволинейной трапеции. Для этого:

i. Разделим AB точками $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$
ii. Длину каждого отрезка вычислим по формуле $\Delta x_i = x_{i+i} - x_i,\ i = 0, 1, 2, ..., n-1$
iii. $d = \max_i \Delta x_i$
iv. $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$
v. Построим прямоугольник с основанием d и высотой ξ_i
   A. $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ — площадь прямоугольника с номером i
vi. $S_{\text{ступенчатой фигуры}} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$
vii. $S_{aABb} \approx S_{\text{ступенчатой фигуры}}$

2.2 Площадь криволинейной поверхности

Площадью криволинейной поверхности называется предел площадей ступенчатой фигуры при условии, что максимальная длина отрезков разбиения стремится к нулю.

1. $S_{aABb} = \lim\limits_{d \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$

2.3 Определенный интеграл

1. Пусть:
   (a) Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$
2. Тогда:
   (a) Разбиение отрезка:
      i. Разделим отрезок на n частей точками $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$
      ii. На каждом отрезке выберем точку $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, где $i = 0, 1, ..., n-1$
   (b) $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ — длина отрезка с номером i
   (c) $d = \max \Delta x_i$ — диаметр разбиения
   (d) $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ — интегральная сумма, соотвествтвующая данному разбиению
3. Определение:
   (a) **Определенным интегралом** функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральной суммы, вычисленный при условии, что диаметр разбиения стремится к нулю, если этот предел существует и не зависит от разбиения отрезка.

(b) Обозначается: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$

(c) Если для функции $y = f(x)$ определенный интеграл на отрезке $[a, b]$ существует, то функция называется **интегрируемой** на этом отрезке.

(d) Если функция интегрируема на данном отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

(e) Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на этом отрезке.

(f) Если функция кусочно непрерывна на данном отрезке, то она также интегрируема на данном отрезке.

(g) Сравнивая определение площади криволинейной трапеции и олпределение определенного интеграла делаем вывод, что в случае, когда $f(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$, $S_{aABb} = \int_a^b f(x)dx$.

(h) Определенный интеграл введен с предположением, что $a < b$.

2.4 Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, $b < a$
3. $\int_a^b 1\cdot dx = b - a$
4. Линейность: $\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))dx = c_1\int_a^b f_1(x)dx + c_2\int_a^b f_2(x)dx$
5. Аддитивность: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
6. Интегрирование неравенств: Если $f(x) \le g(x), \forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$
7. Оценка определенного интеграла:

   (a) Пусть:

   i. $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$
   ii. $m = \min_{[a,b]} f(x)$
   iii. $M = \max_{[a,b]} f(x)$

   (b) Тогда:

   i. $m \le f(x) \le M$, $x \in [a, b]$
   ii. $m(b - a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b - a)$

8. Теорема о среднем

(a) Пусть:

   i. $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$

(b) Тогда:

   i. $m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$

   ii. $\exists c \in [a, b] : \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c) \Longleftrightarrow f(x)dx = f(c)(b-a)$, $c \in [a, b]$

2.5 Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.

1. Пусть:

   (a) Функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$

   (b) $\forall x \in [a, b]$

2. Тогда:

   (a) $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ - интеграл с переменным верхним пределом

   (b) Вычислим приращение этой функции. Для этого:

      i. Вычислим: $\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$

      ii. $\Delta\Phi(x) = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_x^x f(t)dt =$
      $= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$

      iii. $\Delta\Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$ — приращение функции $\Phi(x)$ в точке x

      iv. $\Delta\Phi(x) = f(c) \cdot dx$, $c \in [x, x + \Delta x]$ (по теореме о среднем)

      v. Из полученной формулы следует, что функция $\Phi(x)$ непрерывна в точке x, а следовательно на всем отрезке $[a, b]$

      vi. $\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = f(c)$, $c \in [xmx + \Delta x]$

      vii. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$

      viii. $\exists\Phi'(x) = f(x)$ — функция $\Phi(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$, а её производная равняется $f(x)$, следовательно $\Phi(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

3. Пусть:

   (a) $F(x)$ — производная первообразной функции $f(x)$

4. Тогда:

   (a) $\Phi(x) = F(x) + C$

   (b) $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$, $\forall x \in [a, b]$

i. $x = b$: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

(c) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ — **формула Ньютона-Лейбница**

i. Обозначение: $F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$

ii. $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b$

5. Примеры:

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot dx = \sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$

(b) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x|_1^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

2.6 Замена переменной в определенном интеграле

1. Пусть:

(a) Функция $y = f(x)$ определена на интервале $[a, b]$

(b) $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$

i. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

(c) Функция $\phi(t)$ непрерывна и имеет производную на отрезке $[t_1, t_2]$

(d) $\phi(t) \in [a, b]$, $\phi(t_1) = a$, $\phi(t_2) = b$

(e) $F(\phi(t))$ — первообразная функции $f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$

2. Тогда:

(a) $\int_{t_1}^{t_2} f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt = F(\phi(t))|_{t_1}^{t_2} = F(\phi(t_2)) - F(\phi(t_1)) = F(b) - F(a)$

(b) $\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt$ — формула замены переменной в определенном интеграле

3. Примеры:

(a) $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left|\begin{array}{c} x = \sin t \\ t = \arcsin x \\ x = 0 : t = 0 \\ x = 1 : t = \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{1-x^2} = \cos t \\ dx = \cos t \cdot dt \end{array}\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos t \cdot dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt = (\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin 2t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - 0] = \frac{\pi}{4}$$

(b) $$\int_0^3 \frac{3x-2}{\sqrt{x+1}}dx = \left|\begin{array}{c} \sqrt{x+1} = t \\ x = 0 : t = 1 \\ x = 3 : t = 2 \\ x + 1 = t^2 \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2tdt \end{array}\right| = \int_1^2 \frac{3(t^2-1)-2}{t} 2tdt =$$

$$= 2\int_1^2 (3t^2 - 5)dt = 2(t^3 - 5t)|_1^2 = 2((8-10)-(1-5)) = 2(-2+4) = 4$$

(c) $\int_a^b u\cdot dv = u\cdot v|_a^b - \int_a^b v\cdot du$

i. $\int_0^\pi x\sin x\cdot dx = \begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin x\cdot dx & v=-\cos x \end{vmatrix} =$
$= -x\cdot\cos x|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\cdot dx = -\pi(-1)+\sin x|_0^\pi = \pi$

ii. $\int_0^1 x\cdot\operatorname{arctg} x\cdot dx = \begin{vmatrix} u=\operatorname{arctg} x & du=\frac{dx}{1+x^2} \\ dv=xdx & v=\frac{x^2}{2} \end{vmatrix} =$
$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\frac{1}{1+x^2}) =$
$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(x-\operatorname{arctg} x)|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(1-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

iii. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x\cdot\arcsin x\cdot dx = \begin{vmatrix} \arcsin x = t \\ x=\frac{1}{2} : t=\frac{\pi}{6} \\ x=\frac{\sqrt{3}}{2} : t=\frac{\pi}{3} \\ x=\sin t \\ dx=\cos t\cdot dt \end{vmatrix} =$
$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} t\cdot\sin t\cdot\cos t\cdot dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} t\cdot\sin 2t\cdot dt =$
$= \begin{vmatrix} u=t & du=dt \\ dv=\sin 2t\cdot dt & v=-\frac{1}{2}\cos 2t \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}t\cdot\cos 2t|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 2t\cdot dt) =$
$= -\frac{1}{4}(\frac{\pi}{3}(-\frac{1}{2}) - \frac{\pi}{6}\frac{1}{2}) + \frac{1}{4}\frac{1}{2}\sin 2t|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4}(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}) = \frac{\pi}{16}$

(d) $\int_5^{10} \frac{\sqrt{a^2-25}}{a^4}dx = \begin{vmatrix} x=\frac{5}{\sin t} \\ \sin t=\frac{5}{x} \\ t=\arcsin\frac{5}{x} \\ x=5 : t=\frac{\pi}{2} \\ x=10 : t=\frac{\pi}{6} \\ \sqrt{x^2-25}=5\frac{\cos t}{\sin t} \\ x^4=\frac{5^4}{\sin^4 t} \\ dx=-\frac{5}{\sin^2 t}\cos t\cdot dt \end{vmatrix} =$
$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{5\cos t\cdot\sin^4 t}{\sin t\cdot 5^4}(-5\frac{\cos t}{\sin^2 t})dt = \frac{1}{25}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\cdot\sin t\cdot dt =$
$= \frac{1}{25}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\cdot d\cos t = -\frac{1}{25}\cdot\frac{\cos^3 t}{3}|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{75}\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = \frac{\sqrt{3}}{200}$

(e) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin 2x\cdot dx = \begin{vmatrix} u=\arcsin 2x & du=\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}} \\ dv=dx & v=x \end{vmatrix} =$
$= x\cdot\arcsin 2x|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2xdx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d(1-4x^2)}{\sqrt{1-4x^2}} =$
$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{1-4x^2}|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi-2}{4}$

Part V

Лекция 5 (14.03.15) “Геометрические приложения определенного интеграла”

2.7 Геометрические приложения определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x) \cdot dx = S_{\text{криволинейной трапеции}}$, если $f(x) > 0$
2. С помощью определенного интеграла можно вычислять площади других фигур, а также длины и объемы.

2.7.1 Площадь области, ограниченной графиками двух функций

1. Пусть:
   (a) $f(x) > g(x)$
2. Тогда:
   (a) $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

2.7.2 Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрически

1. Пусть:
   (a) $x = x(t)$
   (b) $y = y(t)$
   (c) $t \in [t_1, t_2]$
   (d) $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$
2. Тогда:
   (a) $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) \cdot dt$

2.7.3 Площадь сектора, ограниченного линией, заданной в полярных координатах

1. Пусть:
   (a) $r = r(\phi)$
2. Тогда:
   (a) $S = \frac{1}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} (r(\phi))^2 d\phi$

2.7.4 Длина дуги кривой, заданной на координатной плоскости уравнением

1. Пусть:
   (a) $y = f(x)$
   (b) $x \in [a, b]$
2. Тогда:
   (a) $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

2.7.5 Длина дуги плоской кривой, заданной на координатной плоскости параметрическими уравнениями

1. Пусть:
   (a) $a = x(t)$
   (b) $y = y(t)$
   (c) $t \in [t_1, t_2]$
2. Тогда:
   (a) $l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$

2.7.6 Длина дуги пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями

1. Пусть:
   (a) $x = x(t)$
   (b) $y = y(t)$
   (c) $z = z(t)$
   (d) $t \in [t_1, t_2]$
2. Тогда:
   (a) $l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$

2.7.7 Длина плоской кривой, заданной в полярных координатах

1. Пусть:
   (a) $r = r(\phi)$
   (b) $\phi \in [\phi_1, \phi_2]$
2. Тогда:
   (a) $l = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{((r(\phi))^2 + (r'(\phi))^2} d\phi$

2.7.8 Объем тела, площадь сечения которого плоскостью, перпендикулярной оси Ox, известна как функция $S = S(x)$

1. Пусть:
   (a) $S = S(x)$
   (b) $x \in [a, b]$
2. Тогда:
   (a) $V = \int_a^b S(x)dx$

2.7.9 Объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси ox

1. Пусть:
   (a) $y = f(x)$
   (b) $x \in [a, b]$
2. Тогда:
   (a) $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

2.7.10 Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной параметрическим уравнением

1. Пусть:
   (a) $x = x(t)$
   (b) $y = y(t)$
   (c) $t \in [t_1, t_2]$
2. Тогда:
   (a) $V = \pi \int_{t_1}^{t_2} (y(t))^2 \cdot x'(t) \cdot dt$

2.7.11 Площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси ox графика функции

1. Пусть:
   (a) $y = f(x)$
   (b) $x \in [a, b]$
2. Тогда:
   (a) $S_{\text{вр}} = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

2.7.12 Площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси ox дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

1. Пусть:
   (a) $x = x(t)$
   (b) $y = y(t)$
   (c) $x \in [t_1, t_2]$
2. Тогда:
   (a) $S_{\text{вр}} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$

2.8 Примеры на применение формул геометрических приложений

2.8.1 Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом

1. Пусть:
   (a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
2. Тогда:
   (a) Вычислим четверть площади эллипса:
      i. $y = f\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$
      ii. $\frac{1}{4}S = \int_0^a f\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \left| \begin{array}{c} x = a\sin t \\ t_1 = 0 \\ t_2 = \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \cos t \\ dx = a\cos t \cdot dt \end{array} \right| =$
      $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \cdot \cos t \cdot a\cos t \cdot dt = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt =$
      $= \frac{ab}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi ab}{4}$
   (b) $S = \pi ab$

2.8.2 Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом

1. Пусть:
   (a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
2. Тогда:
   (a) $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$

(b) $\frac{y^2}{(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})^2} + \frac{z^2}{(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})^2} = 1$ — уравнение элипса

i. $b_x = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

ii. $c_x = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

(c) $S(x) = \pi b_x \cdot c_x = \pi bc(1 - \frac{x^2}{a^2})$

(d) $V = \int_{-a}^{a} S(x)dx = \pi bc \int_{-a}^{a}(1 - \frac{x^2}{a^2})dx =$
$= \pi bc(x - \frac{x^3}{3a^2})|_{-a}^{a} = \pi bc((a - \frac{x^3}{3a^2}) \cdot 2) =$
$= 2\pi bc\frac{2a}{3} = \frac{4}{3}\pi abc$

(e) $V = \frac{4}{3}\pi abc$

2.8.3 Вычислить длину дуги кардиоиды и площадь области, ограниченной кардиоидой

1. Пусть:

(a) $r = a(1 + \cos\phi)$

(b) $a > 0$

2. Тогда:

(a) Длина дуги кардиоиды

i. $\phi \in [0, \pi]$

ii. $l = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{((r(\phi))^2 + (r'(\phi))^2} d\phi$

iii. $r' = -a\sin\phi$

iv. $\sqrt{(r(\phi))^2 + (r'(\phi))^2} = \sqrt{(a^2(1+\cos\phi)^2 + a^2\sin^2\phi} =$
$= a\sqrt{1 + 2\cos\phi + \cos^2\phi + \sin^2\phi} =$
$=a\sqrt{4\cos\frac{\phi}{2}} = 2a\cos\frac{\phi}{2}$

v. $\frac{1}{2}l = 2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\phi}{2} = 2a \cdot 2\sin\frac{\phi}{2}|_0^{\pi} = 4a$

vi. $l = 8a$

(b) Площадь области, ограниченной кардиоидой

i. $S = \frac{1}{2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}(r(\phi))^2 d\phi$

ii. $\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\phi)^2 d\phi =$
$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1 + 2\cos\phi + \cos^2\phi)d\phi =$
$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1 + 2\cos\phi + \frac{1+\cos 2\phi}{2})d\phi =$
$= \frac{a^2}{2}(\frac{3}{2}\phi + 2\sin\phi + \frac{1}{4}\sin 2\phi)|_0^{\pi} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{3}{2}\pi = \frac{3\pi a^2}{4}$

iii. $S = \frac{3\pi a^2}{2}$

2.8.4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аргой циклоиды, вычислить длину одной арги циклоиды, а также объем тела, образованного вращением циклоиды

1. Пусть:

   (a) $x = a(t - \sin t)$

   (b) $y = a(1 - \cos t)$

   (c) $t \in [0, 2\pi]$

   (d) $a > 0$

2. Тогда:

   (a) Площадь фигуры, ограниченной одной аргой циклоиды

      i. $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) \cdot dt$

      ii. $x'(t) = a(1 - \cos t)$

      iii. $S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) \cdot dt =$
      $= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}) =$
      $= a^2 \int_0^{2\pi} (\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t) = a^2 - \frac{3}{2} t|_0^{2\pi} = 3\pi a^2$

      iv. $S = 3\pi a^2$

   (b) Длина дуги

      i. $l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$

      ii. $x' = a(1 - \cos t)$
      $y' = a \sin t$

      iii. $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{x^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} =$
      $= a\sqrt{2 - 2\cos t} = a\sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} = 2a \sin \frac{t}{2}$

      iv. $l = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 2a(-2\cos \frac{t}{2})|_0^{2\pi} =$
      $= -4a(-1 - 1) = 8a$

      v. $l = 8a$

   (c) Объем фигуры

      i. $V_{\text{вр}} = \pi \int_{t_1}^{t_2} (y(t))^2 \cdot x'(t) \cdot dt$

      ii. $V_{\text{вр}} = \pi \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t) \cdot dt =$
      $= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt =$
      $= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt =$
      $= \pi a^3 (2\pi + 3\pi) = 5\pi^2 a^3$

         A. $\int_0^{2\pi} dt = 2\pi$

         B. $\int_0^{2\pi} \cos t \cdot dt = \sin t|_0^{2\pi} = 0$

         C. $\int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = (\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t)|_0^{2\pi} = \pi$

D. $\int_0^{2\pi}\cos^3 t\cdot dt = \int_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)d(\sin t) =$
$= (\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t)|_0^{2\pi} = 0$

iii. $V_{\text{вр}} = 5\pi^2 a^3$

(d) Площадь поверхности фигуры вращения

i. $S_{\text{вр}} = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$

ii. $S_{\text{вр}} = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot 2a\cdot\sin\frac{t}{2}\cdot dt =$
$= 4\pi a^2\int_0^{2\pi}(\sin\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}\cdot\cos t)dt =$
$= 4\pi a^2\int_0^{2\pi}(\sin\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{3t}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2})dt =$
$= 4\pi a^2\int_0^{2\pi}(\frac{3}{2}\sin\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{3t}{2})dt =$
$= 4\pi a^2(\frac{3}{2}(-2\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cos\frac{3t}{2})|_0^{2\pi} =$
$= 4\pi a^2(-3\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{3}\cos^3\frac{3t}{2})|_0^{2\pi} =$
$= 4\pi a^2(-3(-2) + \frac{1}{3}(-1-1)) = 4\pi a^2(6-\frac{2}{3}) =$
$= 4\pi a^2\frac{16}{3} = \frac{64}{3}\pi a^2$

Part VI

Лекция 6 (21.03.15) “Несобственные интегралы”

3 Несобственные интегралы с бесконечными пределами

1. Пусть:

   (a) $y = f(x)$ определена на $[a, +\infty]$ и интегрируема на отрезке $[a, b]$ $\forall b > a$

2. Тогда:

   (a) **Несобственным интегралом** с бесконечным верхним пределом называется предел неопределенного интеграла при условии, что верхний предел стремится к $+\infty$.

   i. $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

   (b) Если предел правой части этого равенства существует и кнечен, то несобственный интеграл называется **сходящимся**. Если предел не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл называется **расходящимся**.

   (c) В случае, когда $f(x) > 0$, несобственный интеграл можно интерпретировать как площадь бесконечной фигуры. Сходимость несобственного интеграла означает, что площадь неограниченной фигуры конечна.

3. Пусть:

(a) $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$

4. Тогда:

(a) $\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)|_a^{+\infty} = F(x) - F(a)$

i. $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x)$

5. Аналогично определяются несобственные интегралы с бесконечным нижним и обоими бесконечными пределами.

(a) $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$

6. Примеры:

(a) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

(b) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x|_1^{+\infty} = +\infty$ — интеграл расходится

(c) $\int_0^{+\infty} \cos x \cdot dx = \sin x|_0^{+\infty}$ — не существует $\Rightarrow$ интеграл расходится

(d) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2} = \int_1^{+\infty} (\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2})dx =$
$= (\ln(x+1) - \ln(x+2))|_1^{+\infty} = \ln\frac{x+1}{x+2}|_1^{+\infty} =$
$= \lim_{x\to+\infty}(\ln\frac{x+1}{x+2}) = -\ln\frac{2}{3} = \ln\frac{3}{2}$

i. $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+2)(x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-2}$

(e) При вычислении несобственного интеграла можно применять методы замены переменной и интегрирования по частям:

i. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot\ln^2 x} = \begin{vmatrix} \ln x = t & x = e & t = 1 \\ \frac{dx}{x} = dt & x = +\infty & t = +\infty \end{vmatrix} =$
$= \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t}|_1^{+\infty} = 1$

ii. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{vmatrix} =$
$= -\frac{\ln x}{x}|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}|_1^{+\infty} = 1$

A. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} =$
$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

iii. $\int_0^{+\infty} e^{-2x} \cdot \cos x \cdot dx = \begin{vmatrix} u = e^{-2x} & du = -2e^{-2x}dx \\ dv = \cos x \cdot dx & v = \sin x \end{vmatrix} =$
$= e^{-2x} \cdot \sin x|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} e^{-2x} \cdot \sin x \cdot dx =$
$= 2\int_0^{+\infty} e^{-2x} \cdot \sin x \cdot dx = \begin{vmatrix} u = e^{-2x} & du = -2e^{-2x}dx \\ dv = \sin x \cdot dx & v = -\cos x \end{vmatrix} =$
$= 2(-e^{-2x} \cdot \cos x)|_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty} e^{-2x} \cdot \cos x \cdot dx =$
$= 2(1 - 2\int_0^{+\infty} e^{-2x} \cdot \cos x \cdot dx) = 2 - 4\int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos x \cdot dx$
$\int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos x \cdot dx = \frac{2}{5}$

A. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{e^{2x}} = 0$

3.1 Признаки сравнения сходимостей функций

3.1.1 Первый признак сходимости (при помощи неравенств)

1. Пусть:
   (a) $f(x)$, $g(x)$
   (b) $0 \leq f(x) \leq g(x)\ \forall x \geq a$
   (c) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$
   (d) $\int_a^{+\infty} g(x)dx$
2. Тогда:
   (a) Если (d) сходится, то и (c) сходится
   (b) Если (c) расходится, то и (d) расходится

3.1.2 Второй признак сходимости (предельный)

1. Пусть:
   (a) $f(x)$, $g(x)$
   (b) $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ при $x \geq a$
   (c) $\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$
   (d) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$
   (e) $\int_a^{+\infty} g(x)dx$
2. Тогда:
   (a) Тогда интегралы (d) и (e) одновременно сходятся, **либо** расходятся.

3.1.3 Примеры

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a} = \int_1^{+\infty} x^{-a}dx =$
   $= \frac{x^{-a+1}}{-a+1}\Big|_1^{+\infty} = -\frac{1}{a-1} \cdot \frac{1}{x^{a-1}}\Big|_1^{+\infty} - \begin{cases} \text{сходится} & \text{a>1} \\ \text{расходится} & a < 1 \end{cases}$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{3x+1}{5x^3+2}dx$
   (a) $f(x) = \frac{3x+1}{5x^3+2} > 0$, при $x \geq 1$
   (b) $g(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, при $x \geq 1$
   (c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(3x+1)x^2}{5x^3+2} = \frac{3}{5} \neq 0$
   (d) $\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ — сходится, т.к. $\alpha = 2 > 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{3x+1}{5x^3+2}dx$ сходится

3. $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$

   (a) $x \geq 1| \cdot x$
   (b) $x^2 \geq x$
   (c) $-x^2 \leq -x$
   (d) $e^{-x^2} \leq e^{-x}$
   (e) $g(x) = e^{-x}$, $f(x) \leq g(x)$, $x \geq 1$
   (f) $\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}|_1^{+\infty} = \frac{1}{e} \Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ сходится

3.2 Абсолютная и условная сходимость

1. Пусть:
   (a) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$
   (b) $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$

2. Тогда:
   (a) Несобственный интеграл (a) называется **абсолютно сходящимся**, если сходится интеграл (b). При этом справедливо утверждение, что если (b) сходится, то и (a) сходится. (абсолютная сходимость)
   (b) Интеграл (a) называется **условно сходящимся**, если интеграл (a) сходится, а интеграл (b) расходится.

3. Примеры:
   (a) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$
      i. $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2} dx$
      ii. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ — сходится, т.к. $\alpha = 2 > 1$
      iii. $\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \Longrightarrow$ (i) сходится $\Longrightarrow$ (a) сходится абсолютно
   (b) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \begin{vmatrix} u = \frac{1}{x} & du = -\frac{dx}{x^2} \\ dv = \sin x \cdot dx & v = -\cos x \end{vmatrix} =$
   $= -\frac{\cos x}{x}|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ — сходится условно
      i. Первое слагаемое — конечное
      ii. Второе слагаемое — конечное (сходится абсолютно)
      iii. $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ — расходится
         A. $\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x}$, $\forall x \geq 1$
      iv. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx =$
      $= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ — расходится
         A. Первое слагаемое — расходится
         B. Второе слагаемое — сходится

3.3 Несобственные интегралы от неограниченной функции

1. Пусть:

   (a) $y = f(x)$ интегрируема на интервале $[a, b-\epsilon]$ $\forall\epsilon \in (0, b-a)$, $\exists \lim_{x\to b-0} f(x) = \infty$

2. Тогда:

   (a) $y = f(x)$ терпит разрыв второго рода при $x = b$

   (b) Несобственным интегралом от неограниченной функции называется $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0+0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$

   (c) Несобственный интеграл **сходится**, если предел в правой части существует и конечен.

   (d) В случае, когда $f(x) > 0$ сходимость интеграла означает конечность площади неограниченной фигуры.

   (e) Аналогично определяется несобственный интеграл, когда точкой разрыва является левый конец промежутка интегрирования или внутренняя точка промежутка интегрирования.

   (f) $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0+0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx$

   (g) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

3. Примеры:

   (a) $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1}|_1^5 = 2(2-0) = 4$ — сходится

      i. $x = 1$ — точка разрыва второго рода

   (b) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\cdot\ln x|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x}dx = -4\sqrt{x}|_0^1 = -4$ — сходится

      i. $x = 0$ — точка разрыва второго рода

      ii. $\lim_{x\to 0+0}(\sqrt{x}\cdot\ln x) = (0\cdot\infty) =$
      $= \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 0$

   (c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}} \left|\begin{matrix}\arcsin x = t \\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt\end{matrix}\right| =$
   $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi}$ — сходится

      i. $x = 0, 1$ — точки разрыва второго рода

4. Признаки сравнения для несобственных интегралов от неограниченных функций формулируются также, как и для несобственных интегралов с бесконечными пределами.

   (a) $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ — $\begin{cases}\text{сходится} & \alpha < 1 \\ \text{расходится} & \alpha \geq 1\end{cases}$

(b) $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} - \begin{cases} \text{сходится} & \alpha < 1 \\ \text{расходится} & \alpha \geq 1 \end{cases}$

5. Примеры:

   (a) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx$ — сходится

      i. $x = 1$ — точка разрыва второго рода

      ii. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\sqrt{1+x^2}}$

      iii. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

      iv. $\lim_{x\to 1-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x}\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \neq 0$

      v. $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ — сходится, т.к. $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

   (b) $\int_0^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^2}$ — расходится

      i. $x = 1$ — точка разрыва второго рода

      ii. $\int_0^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^2} = \int_0^1 \frac{xdx}{(x^2-1)^2} + \int_1^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^2}$

      iii. $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2} = \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^2}$

      iv. $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

      v. $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{1}{4} \neq 0$

Part VII

Лекция 7 (28.03.15) “Двойной интеграл”

4 Двойной интеграл

4.1 Задача о вычислении объема цилиндрического тела

1. Задача о вычислении площади криволинейно трапеции приводит к понятию определенного интеграла. Задача о вычислении объема цилиндрического тела приводит к понятию двойного интеграла.

2. Пусть:

   (a) $z = f(x, y)$

   (b) Д — проекция $f(x.y)$ на xOy

   (c) $f(x, y) > 0, \forall P = \in$ Д

3. Тогда:

(a) Рассмотрим тело, ограниченное поверхностью $z = f(x, y)$, областью Д снизу, а сбоку цилиндрической поверхностью с образующей параллельной оси z.

(b) Разделим область Д прямыми, параллельными координатным осям x и y на прямоугольники Δ_i со сторонами Δx_i, Δy_i, $i = 1, 2, ..., n$

(c) d_i - диагональ прямоугольника Δ_i

(d) $d = \max d_i$ - диаметр разбиения

(e) В каждом прямоугольнике Δ_i выберем произвольную точку $\forall P_i(\xi_i, \eta_i) \int \Delta_i, f(P_i) = f(\xi_i, \eta_i)$

(f) Построим прямоугольный параллелепипед с основанием Δ_i и высотой $f(P_i) = f(\xi_i, \eta_i)$

(g) $\Delta V_i = f(\xi_i \eta_i) \Delta x_i \Delta y_i$

(h) $V = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i \Delta y_i$

4.2 Двойной интеграл

1. Пусть:

   (a) $z = f(x, y)$ определена в области Д

2. Тогда:

   (a) Разделим область Д на части Δ_i

   (b) $d = \max_i d_i$ — диаметр разбиения

   (c) $\forall P_i(\xi_i, \eta_i) \in \Delta_i,\ f(P_i) = f(\xi_i, \eta_i)$

   (d) $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i \Delta y_i$ — **интегральная сумма**

3. Определение:

   (a) **Двойным интегралом** функции $f(x, y)$ в области Д называется предел интегральной суммы, вычисленной при условии, что диаметр разбиения $d \to 0$, если этот предел существует и не зависит от разбиения области.

      i. $\iint_{Д} f(x, y) dxdy = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i \Delta y_i$

   (b) Если двойной интеграл для функции по данной области существует, то функция называется **интегрируемой** в данной области.

   (c) Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области Д, а область Д ограниченна кусочной кривой, то она **интегрируема** по данной области.

   (d) В случае, когда $f(x, y) > 0$ в области Д, двойной интеграл равен объему цилиндрического тела.

(e) Если подынтегральная функция равна 1, то двойной интеграл равен **площади** области Д.

(f) Если подынтегральную функцию интерпретировать как плотность, то двойной интеграл равен **массе** плоской пластины Д.

4.3 Свойства двойного интеграла

1. Линейность: $\iint_{Д}(c_1 f_1(x,y)+c_2 f_2(x,y))dxdy = c_1 \iint_{Д} f_1(x,y)dxdy + c_2 \iint_{Д} f_2(x,y)dxdy$

2. Аддитивность: $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$, $D = D_1 + D_2$

3. Интегрирование неравенств:

   (a) Пусть:

      i. $f(x,y) \leq g(x,y)$ для любой точки $P(x,y) \in D$

   (b) Тогда:

      i. $\iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_D g(x,y)dxdy$

4. Оценка двойного интеграла:

   (a) Пусть:

      i. $m \leq f(x,y) \leq M$ для $\forall P(x,y) \in D$

   (b) Тогда:

      i. $mS \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq MS$, где S — площадь области D

5. Теорема о среднем:

   (a) Пусть:

      i. $f(x,y)$ непрерывна в области D

   (b) Тогда:

      i. $\exists P_0(x_0,y_0) \in D : \iint_D f(x,y)dxdy = f(x,y) \cdot S$

4.4 Вычисление двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному.

1. Назовем область D **простой** относительно оси x, если она ограничена прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками функций $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$.

   (a) Тогда: $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$

2. Пусть область D является простой относительно оси y.

   (a) Тогда: $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$

3. Если область Д проста относилтельно обеих координатных осей, то двйоной интеграл можно вычислять в виде повторного двумя способами.

4. Если область Д не является простой относительно координатных осей, то её надо разделить на части, каждая из которых является простой относительно какой-либо координатной оси.

4.4.1 Примеры

1. $\iint_D xy^2 dxdy$, D: $y = x$, $y = x^2$

   (a) $\iint_D xy^2 dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} xy^2 dy = \int_0^1 (x\frac{y^3}{3}|_{x^2}^{x})dx =$
   $= \frac{1}{3}\int_0^1 x(x^3 - x^6)dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (x^4 - x^7)dx = \frac{1}{3}(\frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8})|_0^1 =$
   $= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{40} = \frac{1}{40}$

   (b) $\iint_D xy^2 dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} xy^2 dx = \int_0^1 (y^2\frac{x^2}{2}|_y^{\sqrt{y}})dy =$
   $= \frac{1}{2}\int_0^1 y^2(y - y^2)dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (y^3 - y^4)dy = \frac{1}{2}(\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5})|_0^1 = \frac{1}{40}$

2. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле: $\int_2^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{8x}} f(x,y)dy =$

   (a) Ограничения:

      i. $x = 2$

      ii. $x = 4$

      iii. $y = \sqrt{4x - x^2}$, $y \geq 0$, $(x-2)^2 + y^2 = 4$ — окружность

         A. $x = 2 + \sqrt{4 - y^2}$

      iv. $y = \sqrt{8x}$, $y \geq 0$, $x = \frac{y^2}{8}$ — парабола

         A. $x = \frac{y^2}{8}$

   (b) $= \int_0^2 dy \int_{2+\sqrt{4-x^2}}^{4} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_2^4 f(x,y)dx + \int_4^{4\sqrt{2}} dy \int_{\frac{y^2}{8}}^{4} f(x,y)dx$

4.5 Двойной интеграл в полярных координатах

1. Пусть область Д ограничена полярными лучами $\phi = \phi_1$, $\phi = \phi_2$ и кривыми $r = r_1(\phi)$, $r = r_2(\phi)$. $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$

2. При переходе к полярным координатам подынтегральная функция домножается на коэффициент, называющийся Якобианом преобразования ($I = r$).

3. $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_{r_1(\phi)}^{r_2(\phi)} f(r\cos\phi, r\sin\phi) \cdot r \cdot dr$

4. Если область интегрирования ограничена дугой эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то удобно пользоваться оьобщенными полярными координатами: $x = ar\cos\phi$, $y = br\sin\phi$, $I = abr$

(a) $\frac{a^2r^2\cos^2\phi}{a^2}+\frac{b^2r^2\sin^2\phi}{b^2}=1$
(b) $r^2=1$
(c) $r=1$ — уравнение эллипса в обощенных полярных координатах

5. Вычисление координат центра масс области:

   (a) $\rho=\rho(x,y)$ — плотность
   (b) $M=\iint_D\rho(x,y)dxdy$
   (c) $\begin{cases}M_x=\iint_D y\rho(x,y)dxdy\\M_y=\iint_D x\rho(x,y)dxdy\end{cases}$ — статические моменты
   (d) $\begin{cases}x_c=\frac{M_y}{M}\\y_c=\frac{M_x}{M}\end{cases}$

4.5.1 Примеры

1. $\iint_D(x^2+y^2)dxdy$

   (a) Ограничения:
      i. $(x-1)^2+y^2=1$
   (b) $x^2+y^2=2x$, $r^2=2r\cos\phi$, $r=2\cos\phi$
   (c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\phi\int_0^{2\cos\phi}r^2\cdot r\cdot dr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^4}{4}|_0^{2\cos\phi}d\phi=$
   $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4\phi d\phi=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4(\frac{1+\cos2\phi}{2})^2d\phi=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos2\phi+\frac{1+\cos4\phi}{2})d\phi=$
   $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{3}{2}+2\cos2\phi+\frac{1}{2}\cos4\phi)d\phi=(\frac{3}{2}\phi+\sin2\phi+\frac{1}{8}\sin4\phi)|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{2}$

2. Вычислить объем тела: $z=x^2+y^2$, $z=4$

   (a) $V=\iint_D(4-(x^2+y^2))dxdy=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^2(4-r^2)r\cdot dr=$
   $=2\pi\int_0^2(4r-r^3)dr=2\pi(2r^2-\frac{r^4}{4})=2\pi(8-4)=8\pi$

3. $\iint_D y^2dxdy$

   (a) Ограничения:
      i. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, $a=3$, $b=2$
   (b) $\begin{cases}x=3r\cos\phi\\y=2r\cos\phi\end{cases}$, $I=6r$
   (c) $\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^1 4r^2\sin^2\phi 6r\cdot dr=\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\cdot d\phi\int_0^1 24r^3dr=$
   $=\int_0^{2\pi}6r^4|_0^1\cdot\sin^2\phi\cdot d\phi=6\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos2\phi}{2}d\phi=$
   (d) $6\frac{1}{2}(\phi-\frac{1}{2}\sin2\phi)|_0^{2\pi}=6\pi$

4. Вычислить центр масс области, ограниченной графиками: $y = 2x^2$, $y = 2$

   (a) $\rho = 1$, $x = 0$
   (b) $M = \iint_D dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{2x^2}^{2} dy = \int_{-1}^{1} (2 - 2x^2)dx = 2x - \frac{2}{3}x^3|_{-1}^{1} =$
   $= (2 - \frac{2}{3}) \cdot 2 = \frac{8}{3}$ — масса пластины
   (c) $M_x = \iint_d ydxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{2x^2}^{2} ydy = \int_{-1}^{1} (\frac{y^2}{2}|_{2x^2}^{2})dx = \int_{-1}^{1} (2 - 2x^4)dx =$
   $= (2x - \frac{2}{5}x^5)|_{-1}^{1} = 2(2 - \frac{2}{5}) = \frac{16}{5}$
   (d) $y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{16 \cdot 3}{5 \cdot 8} = \frac{6}{5}$

5. Вычислить координаты центра масс однородной пластины, ограниченной кардиоидой $r = 1 + \cos\phi$, $\rho = 1$

   (a) $y_c = 0 \Rightarrow M_x = 0$ (проверить)
   (b) $M = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{1+\cos\phi} r \cdot dr = \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2}r^2)|_0^{1+\cos\phi} d\phi =$
   $= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos\phi)^2 d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\phi + \frac{1+\cos 2\phi}{2})d\phi =$
   $= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\frac{3}{2} + 2\cos\phi + \frac{1}{2}\cos 2\phi)d\phi =$
   $= \frac{1}{2}(\frac{3}{2}\phi + 2\sin\phi + \frac{1}{4}\sin 2\phi)|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi = \frac{3}{2}\pi$
   (c) $M_y = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{1+\cos\phi} r \cdot \cos\phi \cdot r \cdot dr =$
   $= \int_0^{2\pi} \cos\phi \cdot d\phi \int_0^{1+\cos\phi} r^2 dr = \frac{5\pi}{4}$ (проверить)
   (d) $x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{5\pi}{4} \cdot \frac{2}{3\pi} = \frac{5}{6}$
   (e) $y_c = 0$
   (f) Ответ: $C(\frac{5}{6}; 0)$

6. Вычислить координаты центра масс однородной пластины, ограниченной дугой эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ и осями координат $(x \geq 0, y \geq 0)$

   (a) $\begin{cases} x = a \cdot r \cdot \cos\phi \\ y = b \cdot r \cdot \sin\phi \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3r\cos\phi \\ y = 2r\sin\phi \end{cases}$
   (b) $I = 6r$
   (c) $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$
   (d) $M = \iint_D dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^1 6r \cdot dr = \frac{\pi}{2} \cdot 3 = \frac{3\pi}{2}$
   (e) $M_y = \iint_D x \cdot dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^1 3r \cdot \cos\phi \cdot 6r \cdot dr =$
   $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 18\cos\phi \cdot d\phi \int_0^1 r^2 dr = 18 \cdot \frac{r^3}{3}|_0^1 = 6$
   (f) $M_x = \iint_D y \cdot dxdy = 4$ (проверить)
   (g) $x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{6 \cdot 2}{3\pi} = \frac{4}{\pi}$
   (h) $y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{4 \cdot 2}{3\pi} = \frac{8}{3\pi}$

(i) Ответ: $C(\frac{4}{\pi}; \frac{8}{3\pi})$

Part VIII
Лекция 8 (04.04.15) “Тройной интеграл”

5 Тройной интеграл

1. Пусть:

   (a) Функция $f(x, y, z)$ определена в области V трехмерного пространства $Oxyz$

2. Тогда:

   (a) Разделим область V плоскостями параллельными координатным плоскостям на прямоугольные параллелепипеды $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$

   (b) Стороны Δ_i обозначим $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$

   (c) $\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ — объем параллелепипеда

   (d) d_i — диагональ параллелепипеда

   (e) $d = \max d_i$ — диаметр разбиения

   (f) $\forall P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta_i$ — выберем произвольные точки

      i. $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ — **интегральная сумма**

   (g) Определение: **Тройным интегралом** функции $f(x, y, z)$ по области V называется предел интегральной суммы, вычисленный при условии, что диаметр разбиения $d \to 0$, если этот предел существует и не зависит от разбиения области.

   (h) Обозначение: $\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$

   (i) Если для функции $y = f(x, y, z)$ интеграл по области V существует, то функция называется **интегрируемой** по данной области.

      i. Если $f(x, y, z)$ непрерывна в области V, а область V ограничена кусочно гладкой поверхностью, то $f(x, y, z)$ **интегрируема** по этой области.

   (j) Тройной интеграл обладает всеми свойствами определенного интеграла (линейность, аддитивность и т.д.)

5.1 Геометрический и физический смысл тройного интеграла

1. Если подынтегральная функция равна 1, то тройной интеграл равен **объему** области.

2. Если подынтегральную функцию интерпретировать как **плотность**, то тройной интеграл равен **массе** тела.

5.2 Вычисление тройного интеграла. Сведение к повторному.

1. Пусть:

   (a) Область V ограничена поверхностями:

   i. $z = z_1(x, y)$ — снизу

   ii. $z = z_2(x, y)$ — сверху

   iii. Цилиндрической поверхностью с образующей паралельной оси z

   (b) D — проекция V на плоскость xOy

2. Тогда:

   (a) $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz =$
   $= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

3. Примеры:

   (a) $\iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^4}$, V: $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$

   i. $y = 1-x$, $z = 1-x-y$

   ii. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^4} =$
   $= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (-\frac{1}{3(1+x+y+z)^3})|_0^{1-x-y} dy =$
   $= \frac{1}{3}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (\frac{1}{(1+x+y)^3} - \frac{1}{8})dy =$
   $= \frac{1}{3}\int_0^1 (-\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8}y)|_0^{1-x} dx =$
   $= \frac{1}{3}\int_0^1 (-\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+x)^2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}x)dx =$
   $= \frac{1}{3}(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{16}x^2)|_0^1 =$
   $= \frac{1}{3}(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{48}$

   (b) $\iiint_V xyzdxdydz$, V: $x^2+y^2+z^2=4, x=0, y=0, z=0$

   i. $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$, $y = \sqrt{4-x^2}$

   ii. $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} xyzdz =$
   $= \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy \cdot \frac{z^2}{2}|_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dy =$
   $= \frac{1}{2}\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy(4-x^2-y^2)dy =$
   $= \frac{1}{2}\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x(4-x^2)y - xy^3)dy =$

$= \frac{1}{2}\int_0^2 (x(4-x^2)\frac{y^2}{2} - x\frac{y^4}{4})|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx =$
$= \frac{1}{2}\int_0^2 (x \cdot \frac{(4-x^2)^2}{2} - x\frac{(4-x^2)^2}{4}) dx =$
$= \frac{1}{8}\int_0^2 x(4-x^2)^2 dx = \frac{1}{8}\int_0^2 (16x - 8x^3 + x^5) dx =$
$= \frac{1}{8}(8x^2 - 2x^4 + \frac{1}{6}x^6)|_0^2 = \frac{1}{8}(32 - 32 + \frac{64}{6}) = \frac{4}{3}$

5.3 Тройной интеграл в полярных координатах

Если границами области V являются сфера, конус, параболоид или цилиндр, то удобно пользоваться цилиндрическими или сферическими координатами.

5.3.1 Цилиндрические координаты

1. Пусть:
   (a) $P(x, y)$ — проекция точки $M(x, y, z)$ на плоскость xOy
   (b) z — проекция точки $M(x, y, z)$ на ось z
   (c) r — расстояние от начала координат до точки P
2. Тогда:
   (a) r, ϕ, z — цилиндрические коодринаты
   (b) $0 \le r < +\infty$
   (c) $0 \le \phi < 2\pi$
   (d) $-\infty < z < +\infty$
   (e) $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases}, I = r$

5.3.2 Сферические координаты

1. Пусть:
   (a) $P(x, y)$ — проекция точки $M(x, y, z)$ на плоскость xOy
   (b) r — длина радиус-вектора точки M
2. Тогда:
   (a) r, ϕ, θ — сферические координаты
   (b) ϕ — долгота, θ — широта
   (c) $0 \le r < +\infty$
   (d) $0 \le \phi < 2\pi$
   (e) $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
   (f) $\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\phi \\ y = r\cos\theta\sin\phi \\ z = r\sin\theta \end{cases}, I = r^2\cos\theta$

5.3.3 Примеры:

1. $\iiint_V xyzdxdydz$, V: $z=\sqrt{4-r^2}, z=0, r=2$

   (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^2 dr \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\cos\phi \cdot r\sin\phi \cdot z \cdot r \cdot dz =$
   $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^2 \cos\phi \cdot \sin\phi \cdot r^3 (\frac{z^2}{2})|_0^{\sqrt{4-r^2}} dr =$
   $= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^2 \cos\phi \sin\phi \cdot r^3(4-r^2)dr =$
   $= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\sin\phi d\phi \int_0^2 (4r^3-r^5)dr =$
   $= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\sin\phi \cdot (r^4 - \frac{r^6}{6})|_0^2 d\phi =$
   $= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\sin\phi \cdot \frac{16}{3} d\phi = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi d\sin\phi =$
   $= \frac{8}{3}\cdot\frac{\sin^2\phi}{2}|_0^1 = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{3}$

2. $\iiint_V xyzdxdydz$

   (a) $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$

   (b) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

   (c) $0 \le r \le 2$

   (d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r\cos\theta\cos\phi \cdot r\cos\theta\sin\phi \cdot r\sin\theta \cdot r^2\cos\theta dr =$
   $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\sin\theta \cdot \cos\phi\sin\phi (\frac{r^6}{6})|_0^2 d\theta =$
   $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\sin\phi d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\sin\theta \frac{32}{3} d\theta =$
   $= \frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\sin\phi(-\frac{\cos^4\theta}{4})|_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi =$
   $= \frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\cos\phi\sin\phi d\phi = \frac{8}{3}\frac{1}{2} = \frac{4}{3}$

5.3.4 Координаты центра масс тела в пространстве

1. $M = \iiint_V \rho(x,y,z)dxdydz$ — масса

2. Статические моменты

   (a) $M_{yz} = \iiint_V x\cdot\rho(x,y,z)dxdydz$ — статический момент относительно плоскости yOz

   (b) $M_{xz} = \iiint_V y\cdot\rho(x,y,z)dxdydz$

   (c) $M_{xy} = \iiint_V z\cdot\rho(x,y,z)dxdydz$

3. Центр масс

   (a) $x_c = \frac{M_{yz}}{M}$

   (b) $y_c = \frac{M_{xz}}{M}$

   (c) $z_c = \frac{M_{xy}}{M}$

5.3.5 Примеры:

1. Вычислить координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями: $2z = x^2 + y^2$ (параболоид), $z = 2$

   (a) Воспользуемся цилиндрическими координатами: $z = \frac{r^2}{2}$

   (b) $\rho = 1$

   (c) $M = \iiint_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 r \cdot dr =$
   $= 2\pi \int_0^2 r \cdot z|_{\frac{r^2}{2}}^2 dr = 2\pi \int_0^2 r(2 - \frac{r^2}{2})dr =$
   $= 2\pi \int_0^2 (2r - \frac{r^3}{2})dr = 2\pi(r^2 - \frac{r^4}{8})|_0^2 = 2\pi(4-2) = 4\pi$

   (d) $M_{xy} \iiint_V z \cdot dxdydz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 zrdz =$
   $= 2\pi \int_0^2 r \cdot \frac{z^2}{2}|_{\frac{r^2}{2}}^2 dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 r(4 - \frac{r^4}{4})dr =$
   $= \pi \int_0^2 (4r - \frac{r^5}{4})dr = \pi(2r^2 - \frac{r^6}{24})|_0^2 =$
   $= \pi(8 - \frac{64}{24}) = \pi(8 - \frac{8}{3}) = \frac{16\pi}{3}$

   (e) $z_c = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{16\pi}{3} \cdot \frac{1}{4\pi} = \frac{4}{3}$

   (f) $C(0, 0, \frac{4}{3})$

2. Вычислить координаты центра масс однородного полушара, заданного следующей системой: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$

   (a) Воспользуемся сферическими координатами: $r = 1$

   (b) $\rho = 1$

   (c) $M = \iiint_v dxdydz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \cos\theta \cdot dr =$
   $= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta (\frac{r^3}{3})|_0^1 d\theta = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta =$
   $= \frac{2\pi}{3} \sin\theta|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3}$

   (d) $M_{xy} = \iiint_V z \cdot dxdydz =$
   $= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r \sin\theta \cdot r^2 \cos\theta dr =$
   $= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta \cdot \frac{r^4}{4}|_0^1 d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d \sin\theta = \frac{\pi}{4}$

   (e) $C(0, 0, \frac{3}{8})$

Part IX
Лекция 9 (11.04.15) "Криволинейный интеграл"

6 Криволинейный интеграл

6.1 Криволинейный интеграл по длине дуги (криволинейный интеграл первого рода)

1. Пусть:
   (a) В пространстве $Oxyz$ задана дуга L
   (b) В точках этой дуги определена функция $f(P) = f(x, y, z)$
   (c) $P \in L$
2. Тогда:
   (a) Введем понятие интеграла функции по кривой L:
   (b) Разделим кривую на отрезки точками $M_0, ..., M_n$
   (c) Кривая L разделилась на дуги. $M_{i-1}M_i$ — элемент разбиения.
   (d) d_i — диаметр дуги $M_{i-1}M_i$ — наибольшее расстояние между точками этой дуги.
   (e) $d = \max d_i$ — диаметр разбиения
   (f) Внутри каждого элемента разбиения выберем точку $P_i \in M_{i-1}M_i$ и вычислим значение функции $f(P_i)$
   (g) $\Delta l_i = |M_{i-1}M_i|$ — длина отрезка
   (h) $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta l_i$ — интегральная сумма
   (i) Определение: Интегралом функции $f(P)$ по дуге L называется предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta l_i$, вычисленнй при условии, что диаметр разбиения $d \to 0$, если этот предел существует и не зависит от разбиения дуги.
   (j) Обозначение: $\int_L f(P)dl = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta l_i$ — криволинейный интеграл функции $f(P)$ по длине дуги (криволинейный интеграл первого рода).
   (k) Если для функции $f(P)$ интеграл по дуге L существует, то функция называется интегрируемой по этой дуге.
   (l) Если $f(P)$ непрерывная, а дуга L является кусочно гладкой, то $f(P)$ **интегрируема** по дуге L.
   (m) Если $f(P) = 1$, то криволинейный интеграл равен длине дуги.

(n) Если $f(P)$ интерпретировать как линейную плотность, то криволинейный интеграл равен массе дуги.

(o) С помощью криволинейного интеграла по длине дуги можно вычислять координаты центра масс дуги.

(p) Криволинейный интеграл введен как предел интегральной суммы следовательно обладает всеми свойствами определенного интеграла.

6.1.1 Способы вычисления

1. Пространственная кривая задана параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ t \in [t_1, t_2] \end{cases}$

   (a) $\int_L f(P)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x, y, z) \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}dt$

2. Плоская кривая задана параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t \in [t_1, t_2] \end{cases}$

   (a) $\int_L f(P)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x, y) \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt$

3. Плоская кривая, заданная уравнением $y = y(x)$, $x \in [a, b]$

   (a) $\int_L f(P)dl = \int_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y')^2}dx$

6.1.2 Примеры:

1. Вычислить массу дуги параболы $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 2]$, если плотность задана формулой $\rho = y$.

   (a) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

   (b) $M = \int_L \rho(P)dl = \int_0^2 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}dx =$
   $= \int_0^2 \sqrt{x + \frac{1}{4}}dx = (x + \frac{1}{4})^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3}|_0^2 =$
   $= \frac{2}{3}((2 + \frac{1}{4})^{\frac{3}{2}} + (\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}) = \frac{13}{6}$

2. Вычислить коодринаты центра масс однородной астроиды $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \\ t \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$,

   $\rho = 1$

(a) $x'(t) = 3\cos^2 t(-\sin t)$
$y'(t) = 3\sin^2 t\cos t$
$(x')^2 + (y')^2 = 9\sin^2 t\cos^2 t$
$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = 3\sin t\cos t$

(b) $M = \int_L \rho dl = \int_L dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t\cos t dt =$
$= 3\frac{\sin^2 t}{2}|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$

(c) $M_y = \int_L x\rho dl = \int_{t_1}^{t_2} x\sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt =$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \cdot 3\sin t\cos t dt =$
$= -3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \cdot d(\cos t) = -\frac{3\cos^5 t}{5}|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{5}$

(d) $x_c = y_c = \frac{M_y}{M} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$

(e) $C(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$

6.2 Криволинейный интеграл по координатам (криволинейный интеграл второго рода)

1. Поставим задачу о вычислении работы произвольной силы при перемещении точки её приложения вдоль произвольной кривой.

2. Пусть:

   (a) $\vec{F}$ — вектор постоянной силы

   (b) $\vec{r}$ — вектор перемещения точки приложения силы

3. Тогда:

   (a) $A = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos\alpha = \vec{F} \cdot \vec{r}$ — работа силы

4. Пусть:

   (a) L — произвольная кривая

   (b) F — переменная сила

5. Тогда:

   (a) Определим работу силы F при перемещении точки её приложения вдоль кривой L:

   (b) Разделим дугу L на n частей

   (c) Каждый элемент разбиения заменим отрезком $\vec{M_{i-1}M_i}$ — вектор элементарного (бесконечно малого) перемещения.

   (d) Выберем произвольную точку $N_i \in M_{i-1}M_i$ и вычислим значение функции $\vec{F}(N_i)$ для этой точки.

   (e) $\vec{F}(N_i)\vec{\Delta l_i}$ — элементарная работа

(f) d — диаметр разбиения

(g) $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(N_i)\vec{\Delta l}$ — интегральная сумма

(h) Определение: Криволинейным интегралом второго рода функции $\vec{F}(P)$ вдоль дуги L называется предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(N_i)\vec{\Delta l}$, вычисленный при условии, что диаметр разделения $d \to 0$, если данный предел существует и не зависит от разбиения кривой.

(i) Физический смысл интеграла — работа силы.

(j) Криволинейный интеграл второго рода меняет хнак при изменении направления обхода кривой.

(k) Обозначение: $\int_L \vec{F} \cdot \vec{dl} = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(N_i) \cdot \vec{\Delta l}_i$

(l) Пусть:

   i. $\vec{F} = (P, Q, R)$

   ii. $\vec{dl} = (dx, dy, dz)$

(m) Тогда:

   i. $\vec{F} \cdot \vec{dl} = Pdx + Qdy + Rdz$

   ii. $\int_L \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$

6.2.1 Способы вычисления

1. Пространственная кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ t \in [t_1, t_2] \end{cases}$

   (a) $\int_L \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{t_1}^{t_2} (P(x, y, z) \cdot x' + Q(x, y, z) \cdot y' +$
   $+ R(x, y, z) \cdot z')dt$

2. Плоская кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t \in [t_1, t_2] \end{cases}$

   (a) $\int_L \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{t_1}^{t_2} (P(x, y) \cdot x' + Q(x, y) \cdot y')dt$

3. Плоская кривая, заданная функцией $y = f(x)$, $x \in [a, b]$

   (a) $\int_L \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y')dx$

6.2.2 Примеры

1. $\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, L: $y=x^2$, $x\in[-1,1]$
   (a) $y'=2x$
   (b) $\int_{-1}^{1}((x^2-2x\cdot x^2)+(x^4-2x\cdot x^2)2x)dx=$
   $=\int_{-1}^{1}(x^2-2x^3+2x^5-4x^4)dx=$
   $=(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{4x^5}{5})|_{-1}^{1}=$
   $=(\frac{1}{3}-\frac{4}{5})\cdot 2=-\frac{7}{15}\cdot 2=-\frac{14}{15}$

Part X

Лекция 10 (18.04.15) “Формула Грина”

6.3 Формула Грина

1. Формула Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом второго рода по замкнутому контуру и двойным интегралом по области, ограниченной этим контуром.
2. Пусть:
   (a) L — кусочно гладкий замкнутый контур, который обходится против хода часовой стрелки
   (b) D — область, ограниченная контуром L
   (c) Функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в области D и на её границе
3. Тогда:
   (a) Справедлива формула $\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$
4. Доказательство:
   (a) Докажем “половину” формулы:
   (b) $\iint_D(-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L Pdx$
   (c) $L=AIB\cup BIIA$
   (d) $\iint_D(-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}(-\frac{\partial P}{\partial y})dy=$
   $=\int_a^b(-P(x,y))|_{y_1(x)}^{y_2(x)}dx=$
   $=\int_a^b(-P(x,y_2(x))+P(x,y_1(x)))dx=$
   $=\int_a^b P(x,y_1(x))dx+\int_b^a P(x,y_2(x))dx=$
   $=\int_{AIB}P(x,y)dx+\int_{BIIA}P(x,y)dx=$
   $=\int_L Pdx$ — что и требовалось доказать

(e) Аналогично доказывается и вторая половина формулы:

(f) $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_L Qdy$

5. Примеры:

   (a) $\oint_L x^2ydx + x^2dy$, $L = \begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$

      i. Непосредственное вычисление криволинейного интеграла:
      ii. $L = OIA \cup AIIO$
      iii. OIA: $y = x^2$, $y' = 2x$, $dy = 2xdx$, $x \in [0;1]$
      iv. $\int_{OIA} x^2ydx + x^2dy = \int_0^1 (x^2x^2 + x^22x)dx =$
      $= \int_0^1 (x^4 + 2x^3)dx = (\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2})|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$
      v. $AIIO$: $y = \sqrt{x}$, $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, $x \in [1;0]$
      vi. $\int_{AIIO} x^2ydx + x^2dy = \int_1^0 (x^2\sqrt{x} + x^2\frac{1}{2\sqrt{x}})dx =$
      $= \int_1^0 (x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}})dx = (\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}})|_1^0 = -\frac{17}{35}$
      vii. $\oint_L x^2ydx + x^2dy = \frac{7}{10} - \frac{17}{35} = \frac{15}{70} = \mathbf{\frac{3}{14}}$
      viii. Второй способ:
      ix. $\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy =$
      $= \oint_L x^2ydx + x^2dy = \iint_D (2x - x^2)dxdy =$
      $= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (2x - x^2)dy =$
      $= \int_0^1 (2x - x^2)y|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$
      $= \int_0^1 (2x - x^2)(\sqrt{x} - a^2)dx =$
      $= \int_0^1 (2x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{5}{2}} - 2x^3 + x^4)dx =$
      $= (2\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5})_0^1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{7} = \mathbf{\frac{3}{14}}$

   (b) $\oint_L ydx - x^2dy$, $L : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

      i. Способ 1: Зададим эллипс параметрическими уравнениями
      ii. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$, $t \in [0; 2\pi]$
      iii. $\begin{cases} dx = -3\sin tdt \\ dy = 2\cos tdt \end{cases}$
      iv. $\oint_L ydx - x^2dy =$
      $= \int_0^{2\pi} (2\sin t(-3\sin t) - 9\cos^2 t \cdot 2\cos t)dt =$
      $= \int_0^{2\pi} (-6\sin^2 t - 18\cos^3 t)dt =$
      $= \int_0^{2\pi} (-6\frac{1-\cos 2t}{2})dt - 18\int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t)d\sin t =$
      $= -3\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t)dt - 18(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t)|_0^{2\pi} =$
      $= -3(t - \frac{1}{2}\sin 2t)|_0^{2\pi} = -3 \cdot 2\pi = -\mathbf{6}\pi$
      v. Способ 2: С помощью формулы Грина

vi. $P = y$, $Q = -x^2$

vii. $\oint_L ydx - x^2dy = \iint_D(-2x-1)dxdy =$

$$= \begin{bmatrix} x = 3r\cos\phi \\ y = 2r\sin\phi \\ I = 6r \\ r = 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 (-6r\cos\phi - 1)6rdr =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 (-36r^2\cos\phi - 6r)dr =$$
$$= \int_0^{2\pi} (-12r^3\cos\phi - 3r^2)|_0^1 d\phi =$$
$$= \int_0^{2\pi} (-12\cos\phi - 3)d\phi =$$
$$= (-12\sin\phi - 3\phi)|_0^{2\pi} = -\mathbf{6}\pi$$

7 Поверхностный интеграл

7.1 Поверхностный интеграл первого рода

1. Пусть:

   (a) В трехмерном пространстве $Oxyz$ уравнение $z = z(x, y)$ задает поверхность σ

   (b) D— проекция на плоскость xOy

   (c) Между точками поверхности и точками проекции установлено взаимно однозначное соответствие.

   (d) В точках $M(x, y, z)$ поверхности σ определена функция $f(M) = f(x, y, z)$

2. Тогда:

   (a) Введем понятие интеграла функции f по поверхности σ

   (b) Для этого произведем разбиение области D на части прямыми, параллельными координатным осям x и y.

   (c) Элементом разбиения является прямоугольник Δ_i со сторонами $\Delta_{x_i}, \Delta_{y_i}$

   (d) d — диаметр разбиения

   (e) $\forall P_i(x_i, y_i) \in \Delta_i$, $M_i(x_i, y_i, z(x_i, y_i)) \in \sigma$

   (f) Через стороны прямоугольника Δ_i проведем плоскости, параллельные оси z до пересечения с поверхностью σ.

   (g) Через точку M_i проведем к поверхности σкасательную плоскость и возьмем ту часть этой плоскости, которая проецируется в Δ_i.

   (h) $\vec{n_i}$ — нормаль к касательной плоскости.

   (i) $\vec{k}$ — единичный вектор оси Oz.

(j) γ_i — угол между касательной плоскостью и проскостью Oxy.

(k) $\Delta\sigma_i \approx \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{\cos\gamma_i}$ (площадь плоской фигуры равна площади её проекции, деленной на косинус угла между плоскостями)

(l) $z - z_i = z'_x(x_i, y_i)(x - x_0) + z'_y(x_i, y_i)(y - y_i)$ — уравнение касательной плоскости

(m) $\vec{n_i} = (-z'_x(x_i, y_i), -z'_y(x_i, y_i), 1)$

(n) $\vec{k} = (0, 0, 1)$

(o) $\cos\gamma_i = \frac{(\vec{n_i} \cdot \vec{k})}{|\vec{n_i}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{1}{\sqrt{(z'_x(x_i,y_i))^2 + (z'_y(x_i,y_i))^2 + 1}}$

(p) $\Delta\sigma_i = \sqrt{(z'_x(x_i, y_i))^2 + (z'_y(x_i, y_i))^2 + 1}\Delta x_i \Delta y_i$

(q) $\sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta\sigma_i =$
$= \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \sqrt{(z'_x(x_i, y_i))^2 + (z'_y(x_i, y_i))^2 + 1}$ — интегральная сумма

(r) Определение: Поверхностным интегралом первого рода называется предел интегральной суммы, вычисленный при условии $d \to 0$, если этот предел существует и не зависит от разбиения области.

(s) Обозначение: $\iint_\sigma f(M)d\sigma = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta\sigma_i$

(t) Если подынтегральная функция равна 1, то поверхностный интеграл равен площади поверхности.

(u) Если подынтегральную функцию интерпретировать как поверхностную плотность, то поверхностный интеграл первого рода равен массе поверхности.

(v) С помощью интеграла можно находить координаты центра масс и т.д.

7.1.1 Способ вычисления

$\iint_\sigma f(M)d\sigma =$
$= \iint_D f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{(z'_x(x_i, y_i))^2 + (z'_y(x_i, y_i))^2 + 1}dxdy$

1. Вычислить координаты центра масс однородного конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ограниченного плоскостью $z = 1$

   (a) $M = \iint_\sigma \rho(x, y, z)d\sigma$

   (b) $M_{xy} = \iint_\sigma z\rho(x, y, z)d\sigma$

   (c) $z_c = \frac{M_{xy}}{M}$

   (d) $\rho = 1$

   (e) $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   (f) $\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} = \sqrt{2}$

(g) $M = \iint_\sigma d\sigma = \iint_D \sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\pi$

(h) $M_{xy} = \iint_\sigma zd\sigma = \iint_D \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{2}dxdy =$
$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 r \cdot \sqrt{2} \cdot rdr = \sqrt{2}2\pi\frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

(i) $z_c = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3\sqrt{2}\pi} = \frac{2}{3}$

(j) $C(0;0;\frac{2}{3})$

2. Вычислить площадь параболоида $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, ограниченного плоскостью $z = \frac{3}{2}$

   (a) $z'_x = x$, $z'_y = y$

   (b) $\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} = \sqrt{x^2+y^2+1}$

   (c) $S = \iint_\sigma d\sigma = \iint \sqrt{x^2+y^2+1}dxdy =$
   $= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1-r^2}rdr =$
   $= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (1+r^2)^{\frac{1}{2}} d(r^2+1) \cdot \frac{1}{2} = \pi\frac{2}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}|_0^{\sqrt{3}} =$
   $= \frac{2\pi}{3}(8-1) = \boldsymbol{\frac{14\pi}{3}}$

Part XI

Лекция 12,13 (2,23.05.15) “Теорема Гаусса-Остроградского”

8 Теорема Гаусса-Остроградского

1. $\iint_\sigma (\vec{a},\vec{n})d\sigma$ - поверхностный интеграл второго рода (лобъем жидкости, протекающий через поверхность σ за единицу времени, если векторное поле $\vec{a}$ - скорость течения жидкости.

   (a) $\vec{a}$ - векторное поле

   (b) $\vec{n}$ - единичный вектор нормали

2. Теорема Гаусса-Остроградского устанавливает связь между поверхностным интегралом второго рода через замкнутую поверхность и тройным интегралом по области, ограниченной этой замкнутой поверхностью.

3. $\oiint_\sigma (\vec{a},\vec{n})d\sigma = \iiint_V div\vec{a} \cdot dxdydz$

4. В координатной форме:

   (a) Пусть:

      i. $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

ii. $\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$

iii. $div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

(b) Тогда:

i. $\oiint_\sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma =$
$= \iiint_V (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})$

5. Пример: Вычислить двумя способами поток векторного поля $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - z^2\vec{k}$ через замкнутую поверхность $V : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 2 \end{cases}$

(a) Способ 1: Непосредственное вычисление потока

i. $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$

ii. $\sigma_1 : x^2 + y^2 = z^2,\ x^2 + y^2 - z^2 = 0$

iii. $F = x^2 + y^2 - z^2$

iv. $gradF = (2x, 2y, -2z)||(x, y, -z)$

v. $\vec{n} = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$
$\vec{a} = (2, 2, -z^2)$

vi. $(\vec{a}, \vec{n}) = \frac{2x+2y+z^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

vii. $d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}dxdy$

viii. $(\vec{a}, \vec{n})d\sigma = \frac{2x+2y+z^3}{z}dxdy$

ix. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

x. $(\vec{a}, \vec{n})d\sigma = (\frac{2x+2y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x^2 + y^2)dxdy$

xi. $\Pi_1 = \iint_D (\frac{2(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} + x^2 + y^2)dxdy =$
$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 (\frac{2(r\cos\phi + r\sin\phi)}{r} + r^2)rdr =$
$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 (2r(\cos\phi + \sin\phi) + r^3)dr =$
$= \int_0^{2\pi} (r^2(\cos\phi + \sin\phi) + \frac{r^4}{4}))|_0^2 d\phi =$
$= \int_0^{2\pi} (4(\cos\phi + \sin\phi) + 4)d\phi =$
$= (\sin\phi - \cos\phi + 4\phi)|_0^{2\pi} = 8\pi$

xii. $\sigma_2 : z = 2$

xiii. $\vec{n} = (0, 0, 1)$
$\vec{a} = (2, 2, -z^2) = (2, 2, -4)$

xiv. $(\vec{a}, \vec{n}) = -4$

xv. $d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = dxdy$

xvi. $(\vec{a}, \vec{n})d\sigma = -4dxdy$

xvii. $\Pi_2 = \iint_D (-4)dxdy = -4 \cdot 4\pi = -16\pi$

xviii. $\Pi = 8\pi - 16\pi = -8\pi$

(b) Способ 2: По теореме Гаусса-Остроградского

i. $div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = -2z$

ii. $\Pi = \iiint_V (-2z)dxdydz =$
$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 rdr \int_r^2 (-2z)dz =$
$= 2\pi \int_0^2 r(-z^2)|_r^2 dr =$
$= 2\pi \int_0^2 r(-4+r^2)dr =$
$= 2\pi \int_0^2 (-4r+r^3)dr =$
$= 2\pi(-2r^2 + \frac{r^4}{4})|_0^2 =$
$= 2\pi(-8+4) = -8\pi$

9 Циркуляция векторного поля

1. $\int_L (\vec{a}, d\vec{r})$ - криволинейный интеграл второго рода
2. Если контур интегрирования замкнут, то криволинейный интеграл второго рода называется **циркуляцией**.
3. $Ц = \oint_L (\vec{a}, d\vec{r})$ - **циркуляция** вектороного поля $\vec{a}$
4. Формула Стокса устанавливает связь между криволинейным интегралом второго рода по замкнутому контуру и поверхностным интегралом второго рода по поверхности, ограниченной этим контуром.
5. $\oint_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_\sigma (rot\vec{a}, \vec{n})d\sigma$ - формула Стокса
6. Циркуляция векторного поля $\vec{a}$ по замкнутому контуру Γ равна потоку вектора $rot\vec{a}$ через поверхность σ, ограниченную этим контуром. Сторона и направление обхода контура согласованы.
7. $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$
8. $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$
9. $\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$
10. $rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$
11. $\oint_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz =$
$= \iint_\sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$
12. Если векторное поле $\vec{a}$ является плоским $\vec{a} \in xOy$, а контур Γ лежит в плоскости xOy и ограничивает область D, то формула принимает вид:
$\oint_\Gamma Pdx + Qdy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$

13. Пример: Вычислить двумя способами циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \vec{i} + x^2\vec{j} + z\vec{k}$ по замкнутому контуру Γ, образованному пересечениями поверхности $z^2 = 1 - x - y$ с координатными плоскостями.

   (a) Контур:

      i. $\Gamma_1 = \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - z^2 \end{cases}$

      ii. $\Gamma_2 = \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 - z^2 \end{cases}$

      iii. $\Gamma_3 = \begin{cases} z = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$

   (b) Способ 1: Непосредственное вычисление циркуляции (как криволинейного интеграла)

      i. $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$

      ii. $\Gamma_1 : x = 0, y = 1 - z^2$

      iii. $\vec{a} = (1, 0, z)$

      iv. $d\vec{r} = (dx, dy, dz) = (0, -2zdz, dz)$

      v. $(\vec{a}, d\vec{r}) = zdz,\ z \in [0, 1]$

      vi. $\int_{\Gamma_1} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_0^1 zdz = \frac{z^2}{2}|_0^1 = \frac{1}{2}$

      vii. $\Gamma_2 : y = 0, x = 1 - z^2$

      viii. $\vec{a} = (1, (1 - z^2)^2, z)$

      ix. $d\vec{r} = (-2zdz, 0, dz)$

      x. $(\vec{a}, d\vec{r}) = -2zdz + zdz = -zdz$

      xi. $\int_{\Gamma_2} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_1^0 (-z)dz = -\frac{z^2}{2}|_1^0 = \frac{1}{2}$

      xii. $\Gamma_3 : z = 0, y = 1 - x, x \in [1, 0]$

      xiii. $\vec{a} = (1, x^2, 0)$

      xiv. $d\vec{r} = (dx, -dx, 0)$

      xv. $(\vec{a}, d\vec{r}) = dx - x^2dx = (1 - x^2)dx$

      xvi. $\int_{\Gamma_3} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_1^0 (1 - x^2)dx = (x - \frac{x^3}{3})|_1^0 = -\frac{2}{3}$

      xvii. $\oint_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, Ц $= \frac{1}{3}$

   (c) Способ 2: по теореме Стокса

      i. Ц $= \iint_\sigma (rot\vec{a}, \vec{n})d\sigma$

      ii. $\sigma : z^2 = 1 - x - y$
      $x + y + z^2 - 1 = 0$
      $F = x + y + z^2 - 1$

      iii. $gradF = (1, 1, 2z)$
      $\vec{n} = (\frac{1}{\sqrt{2+4z^2}}, \frac{1}{\sqrt{2+4z^2}}, \frac{2z}{\sqrt{2+4z^2}})$

iv. $rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 & x^2 & z \end{vmatrix} = (0, 0, 2x)$

v. $(rot\vec{a}, \vec{n}) = \frac{4xz}{\sqrt{2+4z^2}}$

vi. $d\sigma = \frac{dxdz}{|\cos\beta|} = \sqrt{2+4z^2}dxdz$

vii. $(rot\vec{a}, \vec{n})d\sigma = 4xzdxdz$

viii. $Ц = \iint_D 4xzdxdz = \int_0^1 dz \int_0^{1-z^2} 4xzdx =$
$= \int_0^1 4z\frac{x^2}{2}|_0^{1-z^2} dz = 2\int_0^1 z(1-z^2)^2 dz =$
$= 2\int_0^1 z(1-2z^2+z^4)dz =$
$= 2\int_0^1 (z - 2z^3 + z^5)dz =$
$= 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}) = \frac{1}{3}$

Образец потоковой контрольной работы по теме 1

1. Замена переменной:

   (a) $\int x^4 e^{-3x^5} dx = [-3x^5 = t] = -\frac{1}{15}e^{-3x^5} + C$

   (b) $\int \sqrt{\frac{\arcsin^3 2x}{1-4x^2}} dx$

2. Интегрирование по частям:

   (a) $\int x\cos\frac{2x}{3} dx = \begin{vmatrix} u = x \\ dv = \cos\frac{2x}{3} dx \end{vmatrix} = \frac{3}{2}x\sin\frac{2x}{3} + \frac{9}{4}\cos\frac{2x}{3} + C$

   (b) $\int \frac{dx}{x\ln^3(5x)} = \begin{vmatrix} \ln 5x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{vmatrix} = -\frac{1}{2\ln^2(5x)} + C$

3. Интегрирование рациональной дроби:

   (a) $\int \frac{8x+5}{x^2-14x+53} dx = \int \frac{(2x-14)\cdot 4 + 61}{x^2-14x+53} dx =$
   $= 4\int \frac{2x-14}{x^2-14x+53} dx + 61\int \frac{dx}{(x-7)^2+4} =$
   $= 4\ln(x^2 - 14x + 53) + \frac{61}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-7}{2} + C$

4. Интегрирование тригонометрических функций:

   (a) $\int \cos 3x \cos 11x dx = \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 14x)dx =$
   $= \frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{28}\sin 14x + C$

   (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = [\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t] = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$
   $= \int_0^1 \frac{2dt}{2+2t^2+1-t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}|_0^1 = ...$

5. Несобственный интеграл:

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+12x+27} = \frac{1}{6}\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+9})dx =$
$= \frac{1}{6}(\ln|x+3| - \ln|x+9|)|_1^{+\infty} =$
$= \frac{1}{6}\ln|\frac{x+3}{x+9}||_1^{+\infty} = -\frac{1}{6}\ln\frac{4}{10} = \frac{1}{6}\ln\frac{5}{2}$

i. $\frac{1}{x^2+12x+27} = \frac{1}{(x+3)(x+9)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+9} = \frac{\frac{1}{6}}{x+3} + \frac{\frac{1}{6}}{x+9}$

10 Физический смысл дивергенции и ротора векторного поля

1. $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$
2. $div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$
3. $rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$
4. Теорема Гаусса-Остроградского: $\oiint_\sigma(\vec{a}\cdot\vec{n})d\sigma = \iiint_V(div\vec{a})dV$
   (a) $\Pi = \iiint_V(div\vec{a})dV$ - поток
5. Теорема Стокса: $\oint_\Gamma(\vec{a}\cdot d\vec{r}) = \iint_\sigma(rot\vec{a}\cdot\vec{n})d\sigma$
   (a) Ц $= \iint_\sigma(rot\vec{a}\cdot\vec{n})d\sigma$ - циркуляция
6. Физический смысл дивергенции:
   (a) Фиксируем точку M и рассматриваем некоторое тело V, внутри которого расположена эта точка.
   (b) Внутри этого тела определено векторное поле $\vec{a}$.
   (c) $\Pi = \iiint_V div\vec{a}dV$
   (d) Применим теорему о среднем, согласно которой: $\Pi = div\vec{a}(M_0)\cdot V$, $M_0 \in V$
   (e) Выразим отсюда дивергенцию: $div\vec{a}(M_0) = \frac{\Pi}{V}$
   (f) Сожмем это тело к точке $V \to M_0$, $V \to 0$, $M_0 \to M$
   (g) $div\vec{a}(M) = \lim_{V\to 0}\frac{\Pi}{V}$ - **плотность потока**
   (h) Дивергенция векторного поля в заданной точке равна **плотности потока**.
7. Физический смысл ротора:
   (a) Фиксируем точку M в области, в которой задано векторное поле $\vec{a}$, и фиксируем направление с помощью единичного вектора $\vec{n}$.

(b) Рассмартиваем произвольную поверхность σ, которая ортогонально вектору $\vec{n}$ в точке M.

(c) Предполагаем, что Γ - граница этой поверхности.

(d) Направление обхода контура соответствует направлению вектору $\vec{n}$. (против часовой стрелки при $\vec{n}$, направленном на наблюдателя)

(e) $Ц = \iint_\sigma (rot\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma$

(f) Применим к поверхностному интегралу теорему о среднем:

   i. σ - поверхность и ее площадь

   ii. $Ц = (rot\vec{a}(M_0) \cdot \vec{n}) \cdot \sigma$, $M_0 \in \sigma$

   iii. $(rot\vec{a}(M_0) \cdot \vec{n}(M_0)) = \frac{Ц}{\sigma}$

(g) Стягиваем поверхность к точке $\sigma \to M$, $\sigma \to 0$, $M_0 \to M$

(h) $(rot\vec{a}(M) \cdot \vec{n}(M)) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{Ц}{\sigma}$ - плотность циркуляции векторного поля вокруг заданного направления $\vec{n}$.

(i) Проекция $rot\vec{a}$ на направление $\vec{n}$ равна плотности цикруляции векторного поля вокруг данного направления.

(j) Направление вектора $rot\vec{a}$ - направление, циркуляция вокруг которого имеет наибольшую плотность. Модуль вектора $rot\vec{a}$ равен наибольшей плотности циркуляции в данной точке.

8. Таким образом дивергенция и ротор являются характеристиками векторного поля, не зависящими от выбора системы координат (дифференциальные характеристики).

11 Специальные векторные поля

11.1 Потенциальное векторное поле

1. Векторное поле $\vec{a}$ называется потенциальным, если существует скалярная функция $\phi(M) = \phi(x, y, z)$ такая, что $\vec{a} = grad\phi$, $\vec{a} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$

2. Функция ϕ называется функцией потенциала.

3. Векторное поле $\vec{a}$ называется безвыхревым, если $rot\vec{a} = 0$

4. Покажем, что потенциальное поле является безвихревым: $rot(grad\phi) = 0$

   (a) $rot\vec{a} = rot(grad\phi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} =$

   $= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = 0$

5. Циркуляция потенциального векторного поля по любому замкнутому контуру равна нулю. Работа потенциального силового поля по любому контуру равна нулю.

   (a) $\vec{a}$ - потенциальное веторное поле

   (b) $Ц = \oint_{\Gamma}(\vec{a} \cdot d\vec{r}) = \iint_{\sigma}(rot\vec{a} \cdot \vec{n})d\sigma = 0$

   (c) Следствие: Если $\vec{a}$ - потенциальное векторное поле, то криволинейный интеграл второго рода не зависит от формы дуги интегрирования, а зависит только от начальной и конечной точки.

   (d) $\int_{AB}(\vec{a} \cdot d\vec{r}) = \phi(B) - \phi(A)$

11.2 Соленоидальные векторные поля

1. Векторное поле $\vec{a}$ называется соленоидальным, если $div\vec{a} = 0$

2. Векторное поле $\vec{a}$ называется полем вихря, если существует такое векторное поле $\vec{b}$, что $\vec{a} = rot\vec{b}$

3. Покажем, что поле вихря является соленоидальным:

   (a) $\vec{a} = rot\vec{b}$, $\vec{b} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

   (b) $\vec{a} = rot\vec{b} = \vec{i}(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) + \vec{j}(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) + \vec{k}(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$

   (c) $div\vec{a} = \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} = 0$

4. Поток соленоидального поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

   (a) σ - замкнутая поверхность, ограничивающая тело V

   (b) $\oiint_{\sigma}(\vec{a} \cdot \vec{n})d\sigma = \iiint_V div\vec{a} \cdot dV = 0$

Part XII

Лекция 13 (23.05.15) “Подготовка к зачету”

Примеры

1. Поток векторного поля $\vec{a} = 2y^2\vec{i} - 3xy\vec{j} + \vec{k}$, $\sigma : \begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 & \text{параболоид} \\ z = 0 & \\ x = 0 & x \geq 0 \end{cases}$

(a) $\sigma_1 : z = 4 - x^2 - y^2$
$\sigma_2 : z = 0$
$\sigma_3 : x = 0$

(b) Способ 1: Непосредственное вычисление потока

i. $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$

ii. $\Pi = \oiint_\sigma (\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma$

iii. $\Pi_1, \sigma_1 : z = 4 - x^2 - y^2$

A. $F = x^2 + y^2 + z - 4$

B. $gradF = (2x, 2y, 1)$

C. $\vec{n} = \frac{gradF}{|gradF|} =$
$= (\frac{2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, \frac{2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}})$

D. $\vec{a} = (2y^2, -3xy, 1)$

E. $(\vec{a}, \vec{n}) = \frac{4xy^2 - 6xy^2 + 1}{\sqrt{4x^2+4y^2-1}} = \frac{-xy^2+1}{\sqrt{4x^2+4y^2-1}}$

F. $d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 - 1} dxdy$

G. $(\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma = (-2xy^2 + 1) dxdy$

H. $\Pi_1 = \iint_{\sigma_2} (-2xy^2 + 1) dxdy =$
$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^2 (-2r\cos\phi \cdot r^2 \sin^2\phi + 1) rdr =$
$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^2 (-2r^4 \cos\phi \sin^2\phi + r) dr =$
$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\frac{2r^5}{5} \cos\phi \sin^2\phi + \frac{r^2}{2})|_0^2 d\phi =$
$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\frac{64}{5} \cos\phi \sin^2\phi + 2) d\phi =$
$= -\frac{64}{5} (\frac{\sin^3\phi}{3} + 2\phi)|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2(-\frac{64}{5}\frac{1}{3} + \pi) =$
$= -\frac{128}{15} + 2\pi$

iv. $\Pi_2, \sigma_2 : z = 0$

A. $\vec{n} = (0, 0, -1)$

B. $\vec{a} = (2y^2, -3xy, 1)$

C. $(\vec{a} \cdot \vec{n}) = -1$

D. $d\sigma = dxdy$

E. $\Pi_2 = \iint_{\sigma_2} (-1) dxdy = -2\pi$

v. $\Pi_3, \sigma_3 : x = 0$

A. $\vec{n} = (-1, 0, 0)$

B. $\vec{a} = (2y^2, 0, 1)$

C. $(\vec{a} \cdot \vec{n}) = -2y^2$

D. $d\sigma = dydz$

E. $(\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma = -2y^2 dydz$

F. $\Pi_3 = \int_{-2}^{2} dy \int_0^{4-y^2} (-2y^2) dz =$
$= \int_{-2}^{2} (-2y^2)(4 - y^2) dy =$

$= \int_{-2}^{2}(-8y^2 + 2y^4)dy =$
$= (-\frac{8}{3}y^3 + \frac{2}{5}y^5)|_{-2}^{2} = 2(-\frac{8}{3} \cdot 8 + \frac{2}{5} \cdot 32) =$
$= 2(-\frac{64}{3} + \frac{64}{5}) = 128\frac{(-5+3)}{15} = -\frac{256}{15}$

vi. $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = -3 \cdot \frac{128}{15} = -\frac{128}{5}$

(c) Способ 2: Теорема Гаусса-Остроградского

i. $\Pi = \iiint_V div\vec{a}dV$

ii. $div\vec{a} = 0 - 3x + 0 = -3x$

iii. $\Pi = \iiint_V (-3x)dxdydz =$
$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^2 r \cdot dr \int_0^{4-z^2} (-3r\cos\phi)dz =$
$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^2 (-3r\cos\phi)(4 - r^2)rdr =$
$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi d\phi \int_0^2 (-12r^2 + 3r^4)dr =$
$= \sin\phi|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot (-4r^3 + \frac{3}{5}r^5)|_0^2 =$
$= 2(-32 + 3\frac{32}{5}) = 64(-1 + \frac{3}{5}) = -\frac{2}{5} \cdot 64 = -\frac{128}{5}$