Информация о семестре

Темы:

1. Комплексные числа
2. Векторные пространства
3. Линейные операторы
4. Квадратичные формы
5. Евклидово пространство

Зачет по теме:

- Контрольная работа на 4 или 5
- Зачтенный типовой расчет

Контрольные работы:

1. 1 и 2 темы
2. 3 тема
3. 4 и 5 темы

Часть I

Лекции 1,2 (9.02.15, 16.02.15) "Комплексные числа"

1 Комплексные числа

1. $i^2 = -1$ — мнимая единица
2. Комплексное число
   (a) $z = x + iy$ — алгебраическая форма комплексного числа
      i. $x = Rez$ — дествительная часть числа z
      ii. $y = Imz$ — мнимая часть числа z
3. Комплексное число на плоскости [156]
   (a) $\vec{r} = (x, y)$ — радиус-вектор комплексного числа, где:
      i. x — действительная ось
      ii. y — мнимая ось
4. Равенство комплексных чисел:$z_1 = z_2 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

1.1 Арифметические операции над комплексными числами

1.1.1 Сложение и вычетание

1. $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

2. Примеры:

   (a) $(3 + 4i) - (i + 1) = 3 + 4i - i - 1 = 2 + 3i$

1.1.2 Умножение

1. $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$

2. Примеры:

   (a) $(3 + 4i)(i + 1) = 3i + 4i^2 + 3 + 4i = 2 + 7i$

1.1.3 Сопряжение

1. $z = x + iy$

2. $\overline{z} = x - iy$ — сопряженное к z

3. Свойства:

   (a) $\overline{\overline{z}} = z$
   (b) $z + \overline{z} = 2x = 2Rez$
   (c) $z - \overline{z} = 2iy = 2iImz$
   (d) $z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$

1.1.4 Деление

1. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$
   $= \dfrac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$

2. Примеры:

   (a) $\dfrac{3 + 4i}{i + 1} = \dfrac{(3 + 4i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \dfrac{7 + i}{2} = \dfrac{7}{2} + i\dfrac{1}{2}$

1.2 Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

1. $z = x + iy = (x; y)$ — **алгебраическая форма**
2. $0 \leq |z| \leq \infty$ — модуль числа z
3. $\phi = Argz$ — аргумент числа z
4. $-\pi < \phi \leq \pi$ — главное значение аргумента
5. $\begin{cases} x = |z| \cdot \cos\phi \\ y = |z| \cdot \sin\phi \end{cases}$
6. $z = x + iy = |z|\cos\phi + i|z|\sin\phi$
7. $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$ — **тригонометрическая форма**
8. $\cos\phi + i\sin\phi = e^{i\phi}$ — формула Эйлера
9. $z = |z|e^{i\phi}$ — **показательная форма**

1.2.1 Переход от алгебраической формы к тригонометрической и показательной

1. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
2. $\begin{cases} \cos\phi = \frac{x}{|z|} \\ \sin\phi = \frac{y}{|x|} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg}\phi = \frac{y}{x}$
3. Примеры:
   (a) $z = -1 + i\sqrt{3}$
      i. $x = -1$; $y = \sqrt{3}$
      ii. $|z| = \sqrt{1+3} = 2$
      iii. $\operatorname{tg}\phi = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$, II четверть $\Rightarrow \phi = \dfrac{2\pi}{3}$
      iv. $z = 2(cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$
   (b) $z = 16 = 16(\cos 0 + i\sin 0) = 16e^{i\cdot 0}$
      i. $x = 16$; $y = 0$
      ii. $|z| = 16$
   (c) $z = -8i = 8(\cos(-\dfrac{\pi}{2}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{2})) = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}$
      i. $x = 0$; $y = -8$
      ii. $|z| = 8$
      iii. $\phi = -\dfrac{\pi}{2}$

1.3 Умножение и деление чисел в тригонометрической и показательной формах

1. Пусть:

   (a) $z_1 = |z_1|e^{i\phi_1} = |z_1|(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$

   (b) $z_2 = |z_2|e^{i\phi_2} = |z_2|(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$

2. Тогда:

   (a) $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|e^{i(\phi_1+\phi_2)} = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2))$

      i. Доказательство:

         A. $e^{i\phi_1} \cdot e^{i\phi_2} = (\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)(cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$

         B. $\cos\phi_1\cos\phi_2 + \cos\phi_1 i\sin\phi_2 + i\sin\phi_1\cos\phi_1 + i^2\sin\phi_1\sin\phi_2$

         C. $(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) + i(\cos\phi_1\sin\phi_2 + \sin\phi_1\cos\phi_2)$

         D. $\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2) = e^{i(\phi_1+\phi_2)}$

   (b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|e^{i\phi_1}}{|z_2|e^{i\phi_2}} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\phi_1-\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2))$

      i. Доказательтво:

         A. $\dfrac{e^{i\phi_1}}{e^{i\phi_2}} = \dfrac{\cos\phi_1 + i\sin\phi_1}{\cos\phi_2 + i\sin\phi_2} = \dfrac{(cos\phi_1 + i\sin\phi_1)(\cos\phi_2 - i\sin\phi_2)}{\cos^2\phi_2 - i^2\sin^2\phi_2}$

         B. $(\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2) + i(\sin\phi_1\cos\phi_2 - \cos\phi_1\sin\phi_2)$

         C. $\cos(\phi_1-\phi_2) + i\sin(\phi_1-\phi_2) = e^{i(\phi_1-\phi_2)}$

   (c) $z^2 = z \cdot z = |z|^2 e^{i\cdot 2\phi} = |z|^2(\cos 2\phi + i\sin 2\phi)$
   $z^3 = z^2 \cdot z = |z|^3 e^{i\cdot 3\phi} = |z|^3(\cos 3\phi + i\sin 3\phi)$
   $z^n = |z|^n e^{in\phi} = |z|^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$ — **формула Муавра**
   $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1 \cdot e^{i0}}{|z|e^{i\phi}} = \dfrac{1}{|z|}e^{i(0-\phi)} = \dfrac{1}{|z|}e^{-i\phi} = |z|^{-1}e^{-i\phi}$
   $z^{-n} = |z|^{-n}e^{-in\phi}$

1.4 Корень из комплексного числа

1. $z = |z|e^{i\phi} = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$

2. $w = \sqrt[n]{z} \Longleftrightarrow w^n = z$

3. $w = |w|e^{i\psi} = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$

4. $|w|^n e^{in\psi} = |z|e^{i\phi} \Leftrightarrow \begin{cases} |w|^n = |z| \\ n\psi = \phi + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \frac{\phi+2\pi k}{n} \end{cases}$

5. $w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\phi+2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{|z|}(\cos\dfrac{\phi+2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\phi+2\pi k}{n})$ — формула корня

(a) $k=0$: $w_0 = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\phi}{n}}$

(b) $k=1$: $w_1 = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\frac{\phi}{n}+\frac{2\pi}{n})}$

(c) $k=2$: $w_2 = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\frac{\phi}{n}+\frac{4\pi}{n})}$

(d) $\dfrac{2\pi k}{n} \geq 2\pi \Rightarrow k \geq n$

(e) $k=n$: $w_n = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\frac{\phi}{n}+\frac{2\pi n}{n})} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\phi}{n}} = w_0$

(f) $k=n+1$: $w_{n+1} = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\frac{\phi}{n}+\frac{2\pi}{n})}$

(g) $k=0,1,...,n-1$

6. Таким образом, различных корней n-ой степени из комплексного числа существует ровно n штук. На плоскости они образуют правильный n-угольник (при $n=2$ должен получиться отрезок, проходящий через начало координат).

1.4.1 Примеры

1. $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16e^{i\cdot 0}} = \sqrt[4]{16}e^{i\frac{0+2\pi k}{4}}$, $k=0,1,2,3$

   (a) $z_0 = 2e^{i0} = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2$

   (b) $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}) = 2i$

   (c) $z_2 = 2e^{i\pi} = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$

   (d) $z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}) = -2i$

2. $z^4 - 16 = 0 \Rightarrow z^4 = 16 \Rightarrow z = \sqrt[4]{16}$

Часть II

Лекции 3,4 (16.02.15, 02.03.15) “Многочлены и их корни”

1.5 Многочлены и их корни

1. Пусть:

   (a) z — комплексная переменная

2. Тогда:

   (a) $P_n(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + ... + a_nz^n,\ a_n \neq 0$ — комплексный многочлен

   i. a_0 — свободный член
   ii. a_n — старший коэффициент

   (b) z_0 называется корнем многочлена $P(z)$, если $P(z_0) = 0$

3. Примеры:

   (a) $z^2 + 2z + 2 = 0$
   i. $Д = 4 - 8 = -4$
   ii. $\sqrt{Д} = \pm 2i$
   iii. $z_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$

   (b) $az^2 + bz + c = 0$
   i. $z^2 + \dfrac{b}{a}z + \dfrac{c}{a} = 0$
   ii. $(z^2 + 2\dfrac{b}{2a}z + (\dfrac{b}{2a})^2) - (\dfrac{b}{2a})^2 + \dfrac{c}{a} = 0$
   iii. $(z + \dfrac{b}{2a})^2 = \dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \dfrac{Д}{4a^2}$
   iv. $z + \dfrac{b}{2a} = \sqrt{\dfrac{Д}{4a^2}} = \dfrac{\sqrt{Д}}{2a}$
   v. $z = \dfrac{-b + \sqrt{Д}}{2a}$
   vi. $az^2 + bz + c = a(z + \dfrac{b}{2a})^2$(при Д=0) $= a(z - z_1)(z - z_2)$(при Д$\neq$0)

1.5.1 Многочлены степени n

1. Теорема 1 (теорема Безу): $z = z_0$ — корень многочлена $P_n(z) \iff P_n(z) = (z - z_0) \cdot Q_{n-1}(z)$

2. Теорема 2 (основная теорема алгебры многочленов): Любой многочлен $P_n(z)$ с $n \geq 1$ имеет хотя-бы один (вообще говоря, комплексный) корень.

   (a) Следствие: Количество корней многочлена равно n.

1.5.2 Кратность корня

1. Определение: $z = z_0$ — корень кратности k многочлена $P_n(z)$ при $k \leq n$, если $P_n(z) = (z - z_0)^k \cdot Q_{n-k}(z)$ и $Q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

2. Следствие: Любой многочлен n-ой степени ($n \geq 1$) имеет ровно n комплексных корней с учетом их кратности.

3. Доказательство:

(a) $P_n(z) = a_0 + a_1z + ... + a_nz^n =$
$(z - z_1)^{k_1} \cdot Q_{n-k_1}(z) = (z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \cdot Q_{n-(k_1+k_2)}(z) =$
$= (z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2}...(z - z_m)^{k_m} \cdot a_n$ — разложение многочлена на линейные множители.

4. Примеры:

   (a) $P(z) = z^8 - 32z^4 + 256 = (z^4 - 16)^2 = (z - 2)^2(z - 2i)^2(z + 2)^2(z + 2i)^2$

   (b) $P(z) = z^4 + 4z^3 + 4z^2 - 16 = (z^2 + 2z)^2 - 16 = (z^2 + 2z + 4)(z^2 + 2z - 4)$
   $P(z) = (z - (-1 + i\sqrt{3}))(z - (-1 - i\sqrt{3}))(z - (-1 + \sqrt{5}))(z - (-1 - \sqrt{5}))$

   (c) $P(z) = 6z^3 - 14z^2 + 40z - 25$

      i. Подберем корень:
         A. $a_0 = -25 \Rightarrow p : \pm1; \pm5; \pm25$
         B. $a_3 = 6 \Rightarrow q : \pm1; \pm2; \pm3; \pm6$
         C. $z =$ одна из дробей $\frac{p}{q} = \frac{5}{6}$ (посчитано через WolframAlpha)
         D. $\frac{6z^3-17z^2+40z-25}{6z-5} = z^2 - 2z + 5$
         E. $P(z) = (6z - 5)(z^2 - 2z + 5)$ — разложение на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами.

      ii. Найдем оставшиеся корни:
         A. $Д = 4 - 20 = -16$, $\sqrt{Д} = \pm4i$
         B. $z = \frac{2\pm4i}{2} = 1 \pm 2i$
         C. $P(z) = (6z - 5)(z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)$ — разложение на линейные множители

1.5.3 Теорема о сопряженных корнях

1. Пусть:

   (a) $P_n(z) = a_0 + a_1z + ... + a_nz^n$ — многочлен степени n с действительными коэффициентами ($a_i \in R$, $i = 0, ..., n$)

   (b) $z_0 = x_0 + iy_0$ — корень кратности k

2. Тогда:

   (a) $\overline{z_0} = x_0 - iy_0$ — тоже корень кратности k

3. Доказательство:

   (a) Свойства сопряженных:
      i. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
      ii. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
      iii. $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

(b) $P_n(z_0) = 0 \Longrightarrow \overline{P_n(z_0)} = \overline{0} = 0$

(c) $P_n(z) = (z - z_0)(z - \overline{z_0}) \cdot Q_{n-2}(z) = (z^2 - 2zRez_0 + |z_0|^2) \cdot Q_{n-2}(z)$, где Q - многочлен с действительными коэффициентами.

4. Примеры:

   (a) $P(z) = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 22z + 5$, $z_0 = 1 + 2i \Longrightarrow \overline{z_0} = 1 - 2i$

   i. $(z - z_0)(z + \overline{z_0}) = z^2 - 2\Re z_0 z + |z_0|^2 = z^2 - 2z + 5$

   ii. $\frac{z^4-6z^3+14z^2-22z+5}{z^2-2z+5} = z^2 - 4z + 1$

   A. Д $= 16 - 4 = 12$

   B. $z = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

   iii. $P(z) = (z^2 - 2z + 5)(z^2 - 4z + 1)$

   iv. $P(z) = (z^2 - 2z + 5)(z - 2 + \sqrt{3})(z - 2 - \sqrt{3})$ — разложение на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами.

   v. $P(z) = (z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)(z - 2 - \sqrt{3})(z - 2 + \sqrt{3})$ — разложение на линейные множители.

Контрольная работа по первой теме

1. Вычислить и изобразить результат на комплексной плоскости. В этой задаче арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме.

2. Возведение в степень по формуле Муавра.

3. Извлечение корня.

4. Разложить многочлен на множители. Если подбор корня, то он должен быть целым (чаще всего).

Часть III

Лекции 5,6,7 (02.03.15, 16.03.15, 23.03.15) "Линейные векторные пространства"

2 Линейные векторные пространства

1. Пусть:

(a) Дано некоторое непустое множество L, элементы которого будем называть векторами и обозначать как $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, ...$

(b) Определены две арифметические операции: сложение и умножение

i. $\overline{x}, \overline{y} \in L \longrightarrow \overline{x} + \overline{y} \in L$
ii. $\overline{x} \in L \longrightarrow \alpha \cdot \overline{x} \in L$

2. Тогда:

(a) Множество L называется векторным или линейным пространством, если выполнены следующие аксиомы:

i. $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$ — коммутативность сложения
ii. $\overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}) = (\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z}$ — ассоциативность сложения
iii. $\exists \overline{0} \in L : \overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$ — нулевой вектор
iv. $\forall \overline{x} \in L \exists (-\overline{x}) \in L : \overline{x} + (-\overline{x}) = \overline{0}$ — противоположный вектор
v. $1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$
vi. $\alpha \cdot (\beta \overline{x}) = (\alpha\beta) \cdot \overline{x}$ — ассоциативность умножения
vii. $(\alpha + \beta) \cdot \overline{x} = \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{x}$ — распределительный закон
viii. $\alpha(\overline{x} + \overline{y}) = \alpha \cdot \overline{x} + \alpha \cdot \overline{y}$ — распределительный закон

2.1 Следствия из аксиом векторного пространства

1. Нулевой вектор $(\overline{0})$ пространства единственен
2. $\overline{0} = 0 \cdot \overline{x}$
3. $\forall \overline{x} \in L$ вектор $(-\overline{x})$ — единственен
4. $-\overline{x} = (-1) \cdot \overline{x}$

2.2 Примеры векторных пространств

1. $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел с обычными арифметическими операциями сложения и умножения. Выполнение всех восьми аксиом в этой ситуации очевидно.

2. $\mathbb{R}_n = \{\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)\}$ — пространство арифметических векторов

(a) Пусть:

i. $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$
ii. $\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$

(b) Свойства:

i. $\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$
ii. $\alpha \cdot \overline{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$

(c) Аксиомы:

i. 3: $\overline{0} = (0, 0, ..., 0)$

ii. 4: $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $-\overline{x} = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$

iii. Аксиомы 1,2,5-8 очевидны

(d) Следовательно $\mathbb{R}^n$ — пространство арифметических векторов

3. Пространства геометрических векторов — пространства с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на число.

   (a) V_1 — пространство векторов, параллельных данной прямой L

   (b) V_2 — пространство векторов, параллельных данной плоскости

   (c) V_3 — пространство всех геометрических векторов

4. $P_n = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t + ... + a_n t^n\}$ — пространство многочленов степени не выше, чем n, с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на число.

   (a) Пусть:

      i. $p_1(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n$

      ii. $p_2(t) = b_0 + b_1 t + ... + b_n t^n$

   (b) Тогда:

      i. $p_1(t) + p_2(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + ... + (a_n + b_n)t^n$

      ii. $\lambda p_1(t) = \lambda a_0 + \lambda a_1 t + ... + \lambda a_n t^n$

5. M_{mn} — пространство матриц размера $m \cdot n$ с обычными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число.

   (a) $M_{22} = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$

   (b) $M_{23} = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \right\}$

6. $C_{[a,b]}$ — пространство функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число.

2.3 Базис

1. Линейно зависимые и независимые векторные пространства (см. распечатку)

2. Полнота системы

   (a) Пусть:

      i. L — векторное пространство

ii. $S = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}\}$

(b) Тогда:

i. Система S полна, если $\forall \overline{x} \in L$, $\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + x_m\overline{e_m}$

3. Теорема о соотношении

(a) Пусть:

i. $S_1 = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_m}\}$ — линейно независимая система

ii. $S_2 = \{\overline{f_1}, \overline{f_2}, ..., \overline{f_n}\}$ — полная система

(b) Тогда:

i. $n \geq m$

2.4 Базис системы

1. Пусть:

(a) $S = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}\}$ — линейно независимая и полная система

2. Тогда:

(a) L — базис системы S

(b) $\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + ... + x_n\overline{e_n}$ — разложение вектора $\overline{x}$ по базису L системы S

(c) $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ — координаты вектора $\overline{x}$ в базисе L системы S

(d) **Размерность пространства** $\dim L = n$ — количество векторов в базисе системы

2.4.1 Примеры

1. $R_n = \{\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)\}$

(a) $\overline{e_1} = (1, 0, ..., 0)$
$\overline{e_2} = (0, 1, ..., 0)$
...
$\overline{e_n} = (0, 0, ..., 1)$

(b) $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + ... + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ — система линейно независима

(d) $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ — координаты в каноническом базисе

2. $P_n = \{p(t) = a_0 + a_1t + ... + a_nt^n\}$

(a) $\overline{e_1} = 1$
$\overline{e_2} = t$
$\overline{e_3} = t^2$
...
$\overline{e_n} = t^n$

(b) $\lambda_0 \overline{e_0} + \lambda_1 \overline{e_1} + ... + \lambda_n \overline{e_n} = \overline{0}$
$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \cdot t + ... + \lambda_n \cdot t^n \equiv 0$

3. $M_{22} = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$

   (a) $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
   $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) Линейная независимость:

      i. $\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 = 0$
      ii. $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$
      iii. $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
      $\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \Longrightarrow$
      $\Longrightarrow E_1, E_2, E_3, E_4$ — л.н.з.

   (c) Полнота:

      i. $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4$

   (d) E_1, E_2, E_3, E_4 — канонический базис пространства M_{22}, $\dim M_{22} = 4$

   (e) $X = (a, b, c, d)$ — координаты в каноническом базисе

2.5 Теорема

1. Пусть:

   (a) L — векторное пространство
   (b) $S = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}\}$ — базис
   (c) $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$
   $\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$

2. Тогда:

   (a) $\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$
   (b) $\lambda \overline{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$

2.6 Преобразование координат вектора при замене базиса

1. Пусть:

   (a) L — векторное пространство

   (b) $\dim L = 3$

   (c) $S_1 = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ — "старый" базис

   (d) $S_2 = \{\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}\}$ — "новый" базис

   (e) $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)_{S_1} = (x_1', x_2', x_3')_{S_2}$

2. Тогда:

   (a) Разложим векторы f_1, f_2, f_3 по базису S_1

      i. $\overline{f_1} = p_{11}\overline{e_1} + p_{21}\overline{e_2} + p_{31}\overline{e_3} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix}$

      ii. $\overline{f_2} = p_{12}\overline{e_1} + p_{22}\overline{e_2} + p_{32}\overline{e_3} = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix}$

      iii. $\overline{f_3} = p_{13}\overline{e_1} + p_{23}\overline{e_2} + p_{33}\overline{e_3} = \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix}$

   (b) Составим из полученных координат матрицу

      i. $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$ — матрица перехода из базиса S_1 к базису S_2

   (c) Утверждение: Матрица перехода P невырождена

      i. $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}$ — линейно независимая система

      ii. $\alpha_1\overline{f_1} + \alpha_2\overline{f_2} + \alpha_3\overline{f_3} = \overline{0} \Longleftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

      iii. $\alpha_1 \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

      iv. $\begin{cases} \alpha_1 p_{11} + \alpha_2 p_{12} + \alpha_3 p_{13} = 0 \\ \alpha_1 p_{21} + \alpha_2 p_{22} + \alpha_3 p_{23} = 0 \\ \alpha_1 p_{31} + \alpha_2 p_{32} + \alpha_3 p_{33} = 0 \end{cases}$

      v. Линейная однородная система имеет только одно решение только тогда, когда ранг матрицы системы равен числу неизвестных. $rangP = 3 \Longleftrightarrow \det P \neq 0$

   (d) Следствие: Способ проверки линейной независимости векторов, записанных в координатной форме.

i. Составляем матрицу из координат векторов в каком-либо базисе и считаем её ранг.

ii. Если ранг матрицы равен числу векторов, то система **линейно независима**. Если ранг матрицы меньше числа векторов, то система **линейно зависима**.

(e) Пример:

i. $\overline{e_1} = (1, 0, 2, -1)$
$\overline{e_2} = (0, -1, 1, 3)$
$\overline{e_3} = (2, 1, 3, -5)$

A. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

B. $rangP = 2$

C. $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ — линейно зависимая система

(f) $\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + x_3\overline{e_3} = x_1'\overline{f_1} + x_2'\overline{f_2} + x_3'\overline{f_3}$

(g) $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1' \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix} + x_2' \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix} + x_3' \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix}$

(h) $\begin{cases} x_1 = x_1'p_{11} + x_2'p_{12} + x_3'p_{13} \\ x_2 = x_1'p_{21} + x_2'p_{22} + x_3'p_{23} \\ x_1 = x_1'p_{31} + x_2'p_{32} + x_3'p_{33} \end{cases}$

(i) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \Longrightarrow X = P \cdot X' \Longrightarrow X' = P^{-1} \cdot X$

3. Примеры:

(a) $f_1 = e^t$
$f_2 = e^{2t}$
$f_3 = e^{3t}$

i. $\alpha_1\overline{f_1} + \alpha_2\overline{f_2} + \alpha_3\overline{f_3} = \overline{0}$

ii. $\begin{cases} \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{2t} + \alpha_3 e^{3t} \equiv 0 \\ \alpha_1 e^t + 2\alpha_2 e^{2t} + 3\alpha_3 e^{3t} \equiv 0 \\ \alpha_1 e^t + 4\alpha_2 e^{2t} + 9\alpha_3 e^{3t} \equiv 0 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0 \end{cases}$

iv. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ — система линейно независима

(b) $f_1 = \sin t$
$f_2 = \cos t$
$f_3 = \sin 2t$
$t \in (0, \pi)$

i. $\alpha_1 \overline{f_1} + \alpha_2 \overline{f_2} + \alpha_3 \overline{f_3} = \overline{0}$
ii. $\alpha_1 \sin t + \alpha_2 \cos t + \alpha_3 \sin 2t \equiv 0$
A. $t = \frac{\pi}{3}$: $\alpha_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \alpha_2 \cdot \frac{1}{2} + \alpha_3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$
B. $t = \frac{\pi}{2}$: $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 = 0$
C. $t = \frac{2\pi}{3}$: $\alpha_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \alpha_2 \cdot (-\frac{1}{2}) + \alpha_3 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$
iii. $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}\alpha_3 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$
iv. $0 \cdot \sin t - \sqrt{3} \cos t + 1 \cdot \sin 2t \not\equiv 0$ — линейно независимая система

Часть IV

Лекции 8,9 (30.03.15, 06.04.15) “Функции на линейных векторных пространствах”

3 Линейные операторы

1. Пусть:
   (a) V — векторное пространство
   (b) $\hat{A} : V \longrightarrow V$
   (c) $\vec{x} \curvearrowright^{\hat{A}} \vec{y}$
   (d) $\vec{y} = \hat{A}x$
      i. $\vec{y}$ — образ вектора $\vec{x}$
      ii. $\vec{x}$ — прообраз вектора $\vec{y}$
2. Тогда:
   (a) $\hat{A}$ — векторный оператор, если:
      i. $\hat{A}(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = \hat{A}\vec{x_1} + \hat{A}\vec{x_2}$
      ii. $\hat{A} = (\lambda\vec{x}) = \lambda\hat{A}\vec{x}$

3.1 Задание линейного оператора с помощью матрицы

1. Пусть:

   (a) V — векторное пространство размерности 3

   (b) $S = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ — базис

   (c) $\hat{A}$ — линейный оператор

2. Тогда:

   (a) Найдем образ базисных векторов при действии оператора $\hat{A}$:

   (b) $\begin{cases} \hat{A}\vec{e_1} = a_{11}\vec{e_1} + a_{21}\vec{e_2} + a_{31}\vec{e_3} \\ \hat{A}\vec{e_1} = a_{12}\vec{e_1} + a_{22}\vec{e_2} + a_{32}\vec{e_3} \\ \hat{A}\vec{e_1} = a_{13}\vec{e_1} + a_{23}\vec{e_2} + a_{33}\vec{e_3} \end{cases}$

   (c) $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$

   (d) $\hat{A}\vec{x} = x_1\hat{A}\vec{e_1} + x_2\hat{A}\vec{e_2} + x_3\hat{A}\vec{e_3} =$
   $= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} =$
   $= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 & a_{32}x_2 & a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

   (e) $\vec{y} = \hat{A}\vec{x}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

3.2 Примеры операторов

1. $\hat{0}\vec{x} = \vec{0}$ — нулевой оператор

   (a) $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $Im\hat{0} = \{\vec{0}\}$, $rang\hat{0} = 0$

   (c) $Ker\hat{0} = V$, $defect\hat{0} = \dim V$

   (d) $\hat{0}^{-1}$ не существует

2. $\hat{I}\vec{x} = \vec{x}$ — тождественный оператор

   (a) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $Im\hat{I} = V$, $rang\hat{I} = \dim V$

(c) $Ker\hat{I} = \{\vec{0}\}$, $defect\hat{I} = 0$

(d) $\hat{I}^{-1} = \hat{I}$ $(E^{-1} = E)$

3. $\hat{\Lambda}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ — оператор подобия

   (a) $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

   (b) $\lambda = 0$ — см. 1

   (c) $\lambda \neq 0$ — см. 2

      i. $\hat{\Lambda}^{-1}$ существует

      ii. $\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$

4. $\hat{T_\alpha}$ — оператор поворота на угол α на плоскости вокруг начала координат

   (a) $\hat{T_\alpha}\vec{i} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$

   (b) $\hat{T_\alpha}\vec{j} = -\sin\alpha \cdot \vec{i} + \cos\alpha \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$

   (c) $T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

   (d) $Im\hat{T_\alpha} = V$, $rang\hat{T_\alpha} = 2$

   (e) $Ker\hat{T_\alpha} = \{\vec{0}\}$, $defect\hat{T_\alpha} = 0$

   (f) $\hat{T_\alpha}^{-1}$ существует $(\det T_\alpha^{-1} = 1)$

   (g) $T_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ — оператор поворота по часовой стрелке

5. $\hat{A}\vec{x} = [\vec{a}, \vec{x}]$, $\vec{a} = (1, 0, -1)$

   (a) $\hat{A}\vec{i} = [\vec{a}, \vec{i}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -1, 0)$

   (b) $\hat{A}\vec{j} = [\vec{a}, \vec{j}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 0, 1)$

   (c) $\hat{A}\vec{k} = [\vec{a}, \vec{k}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 0)$

(d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(e) Способ 1: Исходя из геометрических свойств векторного произведения

i. $Ker\hat{A} = \{\vec{x} = \alpha\vec{a}\}$ — векторы, коллинеарные вектору $\vec{a}$

ii. $defect\hat{A} = 1$

iii. $Im\hat{A} = \{\vec{y} \in V_3 : (\vec{y}, \vec{a}) = 0\}$ — векторы, перпендикулярные вектору $\vec{a}$

iv. $rang\hat{A} = 2$

(f) Способ 2: Найдщем ядро и образ с помощью матрицы оператора $\hat{A}$

i. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ii. $Ker\hat{A} : \hat{A}\vec{x} = 0$

A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

B. $rang\hat{A} = 2$

C. $\begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \alpha \end{cases}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\vec{a}$ — ядро

D. $A\vec{x} = \vec{0}$

iii. $Im\hat{A} : \vec{y} = \hat{A}\vec{x}$

A. $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (x_1 + x_3) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

C. $Im\hat{A} = \{\vec{y} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2}\}$, $\vec{e_1}, \vec{e_2} \perp \vec{a}$

iv. $Ker\hat{A} = \{\vec{x} = \alpha\vec{a}\} \Longrightarrow \hat{A}^{-1}$ не существует

(g) $\hat{D}p(t) = p'(t)$, $p(t) \in P_n$

i. $Ker\hat{D} = \{p(t) \equiv C\}$, $defect\hat{D} = 1$

ii. $Im\hat{D} = \{g(t) \in P_{n-1}\}$, $rangP_{n-1} = n$

iii. $Ker\hat{D} = \{p(t) \equiv C\} \Longrightarrow \hat{D}^{-1}$ не существует

(h) $\hat{A}$ — отражение относительно $y = 2x$ на плоскости

i. $A^2 = E \Longrightarrow A^{-1} = A \Longrightarrow \hat{A}^{-1} = \hat{A}$

3.3 Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса

1. Пусть:

   (a) V — векторное пространство

   (b) $S_1 = \{\vec{e_1}, ..., \vec{e_n}\}$ — "старый" базис

   (c) $S_2 = \{\vec{f_1}, ..., \vec{f_n}\}$ — "новый" базис

   (d) $\hat{A}$ — линейный оператор

   (e) A_x — матрица линейного оператора в базисе S_x

   (f) P — матрица перехода от S_1 к S_2

2. Тогда:

   (a) $\vec{y} = \hat{A}\vec{x}$

   (b) $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{S_1} = \begin{pmatrix} y_{1'} \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix}_{S_2}$

   (c) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix}$

   (e) $P \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = A_1 P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$

   (f) $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = P^{-1} A_1 P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$

   (g) $A_2 = P^{-1} A_1 P$

3.4 Ядро и образ линейного оператора

1. $Im\hat{A} = \{\vec{y} \in V : \exists \vec{x} \in V, \vec{y} = \hat{A}\vec{x}\}$ — **образ** оператора
2. $Ker\hat{A} = \{\vec{x} \in V : \hat{A}\vec{x} = \vec{0}\}$ — **ядро** оператора
3. Утверждение: ядро и образ оператора являются подпространствами векторного пространства V.
4. $\dim Im\hat{A} = rangA$
5. $\dim Ker\hat{A} = defect\hat{A}$ — дефект оператора
6. $rang\hat{A} + defect\hat{A} = \dim V$

3.5 Действия с линейными операторами

1. Пусть:

   (a) V — векторное пространство

   (b) $\hat{A}$, $\hat{B}$ — линейные операторы

2. Тогда:

   (a) $\hat{C} = \alpha\hat{A}$

      i. $\hat{C}\vec{x} = \alpha\hat{A}\vec{x}$

      ii. $C = \alpha A$ в любом базисе

   (b) $\hat{C} = \hat{A} \pm \hat{B}$

      i. $\hat{C}\vec{x} = \hat{A}\vec{x} \pm \hat{B}\vec{x}$

      ii. $C = A \pm B$ в любом базисе

   (c) $\vec{x} \longrightarrow^{\hat{A}} \vec{y} \longrightarrow^{\hat{B}} \vec{z}$, $\vec{x} \longrightarrow^{\hat{C}} \vec{z}$

      i. $\hat{C} = \hat{B} \cdot \hat{A}$

      ii. $\hat{C}\vec{x} = \hat{B}(\hat{A}\vec{x})$

      iii. $C = B \cdot A$ в любом базисе

   (d) $\vec{x} \longrightarrow^{\hat{A}} \vec{y} \longrightarrow^{\hat{A}} \vec{z}$, $\vec{x} \longrightarrow^{\hat{C}} \vec{z}$

      i. $\hat{C}\vec{x} = \hat{A}^2\vec{x}$

      ii. $\hat{C} = \hat{A}^n : \hat{C}\vec{x} = \hat{A}(\hat{A}(...(\hat{A}\vec{x}))$

      iii. $C = A^n$ в любом базисе

3. Примеры:

   (a) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

      i. $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$

   (b) $\hat{A}$ - отражение относительно $y = 2x$

      i. $A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

      ii. $A^{2n} = \hat{I} \Longrightarrow A^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

      iii. $A^{2n+1} = \hat{A} \Longrightarrow A^{2n+1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

3.6 Обратные операторы

1. $y = 2x \longrightarrow x = \frac{y}{2}$ — обратная функция
2. $\hat{A}^{-1}$ — обратный оператор
   (a) $\hat{A}^{-1}(\hat{A}\vec{x}) = \hat{A}(\hat{A}^{-1}\vec{x}) = \vec{x}, \forall\vec{x} \in V$
   (b) $\hat{A}^{-1} \cdot \hat{A} = \hat{A} \cdot \hat{A}^{-1} = \hat{I}$
3. Критерии существования обратного линейного оператора:
   (a) В терминах матрицы: Оператор $\hat{A}^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда **матрица** оператора $\hat{A}$ в любом базисе невырождена. $detA \neq 0$
      i. Матрицей обратного оператора является матрица A^{-1}.
   (b) В терминах ядра: Оператор $\hat{A}^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда **ядро** оператора $\hat{A}$ состоит только из нулевого вектора $\vec{0}$. $(defectA = 0)$
   (c) В терминах образа: Оператор $\hat{A}^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда **образ** оператора $\hat{A}$ совпадает с самим пространством V. $(rangA = \dim V)$

3.7 Собственные значения и собственные векторы

1. Ненулевой вектор $\vec{x}$ называется **собственным вектором** линейного оператора $\hat{A}$, соответствующим собственному значению λ, если выполняется равенство $\hat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$
   (a) Геометрический смысл: $\vec{x} \curvearrowright^{\hat{A}} \lambda\vec{x}$ — Под действием оператора вектор переходит в коллинеарный самому себе с коэффициентом пропорциональности λ.
2. Пусть:
   (a) A — матрица линейного оператора $\hat{A}$ в некотором базисе S
3. Тогда:
   (a) $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
   (b) $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $(A-\lambda E)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ — матричная запись линейной однородной системы

(d) Линейная однородная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы меньше, чем число неизвестныъ.

(e) $rang(A-\lambda E)<n \Longrightarrow det(A-\lambda E)=0$

(f) $|A-\lambda E|=0$ — характеристическое уравнение, ищем λ

(g) $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ — ищем собственный вектор $\vec{x}$

4. Пример:

(a) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

(b) Нахождение собственных значений

i. $\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^3+2-3(1-\lambda)=$
$=1-3\lambda+3\lambda^2-\lambda^3+2-3+3\lambda=3\lambda^2-\lambda^3=$
$=\lambda^2(3-\lambda)=0$

ii. $\lambda=0$, $\lambda=3$

(c) Нахождение собственных векторов:

i. $\lambda=0$: $A\vec{x}=\vec{0}$

ii. $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

iii. $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $rang=1$

iv. $x_2=a$, $x_3=b$ — свободные переменные

v. $x_1+x_2+x_3=0$

vi. $x_1=-x_2-x_3=-a-b$

vii. $\vec{x}=\begin{pmatrix}-a-b\\a\\b\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $a^2+b^2\neq 0$

viii. $\lambda=3$: $(A-3E)\vec{x}=\vec{0}$

ix. $\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

x. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim$
$\sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $rang = 2$

xi. $x_3 = a$ — свободная переменная

xii. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

xiii. $x_2 = x_3 = a$

xiv. $-2x_1 = -x_2 - x_3 = -2a$, $x_1 = a$

xv. $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$

5. Оператор $\hat{A}$ называется оператором **простого типа**, если из его собственных векторов можно составить базис пространства V.

   (a) В базисе из собственных векторов матрица оператора имеет **диагональный** вид, причем на диагонали записываются собственные значения, соответствующие базисным векторам.

   (b) Базис из собственных векторов:
   $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (c) $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det P = 3 \neq 0 \Longrightarrow rangP = 3$
   $\Longrightarrow \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ — базис пространства V^3

   (d) $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   (e) $\hat{A} = \hat{A}_1 \cdot \hat{A}_2$ — последовательное выполнение двух операторов:

      i. $\hat{A}_1$ — проекция векторов на ось $x = y = z$

      ii. $\hat{A}_2$ — оператор подобия с коэффициентом $\lambda = 3$

6. Утверждение:

   (a) Пусть:

      i. $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ — собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, соответствующие различным собственным значениям λ.

      ii. $\hat{A}\vec{x_1} = \lambda_1 \vec{x_1}$
      $\hat{A}\vec{x_2} = \lambda_2 \vec{x_2}$

(b) Тогда:

   i. Векторы $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ линейно независимы

(c) Доказательство:

   i. $a\vec{x_1} + b\vec{x_2} = \vec{0}$
   ii. $\hat{A}(a\vec{x_1} + b\vec{x_2}) = \hat{A}\vec{0}$
   iii. $a\hat{A}\vec{x_1} + b\hat{A}\vec{x_2} = \vec{0}$
   iv. $a\lambda_1\vec{x_1} + b\lambda_2\vec{x_2} = \vec{0}$
   v. $\begin{cases} a\vec{x_1} + b\vec{x_2} = \vec{0} \\ a\lambda_1\vec{x_1} + b\lambda_2\vec{x_2} = \vec{0} \end{cases}$
      A. $I - I \cdot \lambda_1$: $b(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{x_2} = \vec{0}$, $b = 0$
      B. $II - I\lambda_2$: $a(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{x_1} = \vec{0}$, $a = 0$
   vi. $a = b = 0 \Longrightarrow \vec{x_1}, \vec{x_2}$ линейно независимы

3.8 Исследование оператора

1. Пусть:

   (a) $\hat{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V

2. Тогда:

   (a) Построить матрицу оператора в каноническом базисе пространства V

   (b) Найти образ вектора $\vec{x} = (...)$

   (c) Найти образ $Im\hat{A}$ оператора и его ранг $rang\hat{A}$

   (d) Найти ядро $Ker\hat{A}$ оператор и его дефект $defect\hat{A}$

   (e) Доказать существование обратного оператора $\hat{A}^{-1}$ и найти его

   (f) Найти собственные значения и собственные вектора оператора $\hat{A}$

   (g) Показать, является ли оператор $\hat{A}$ оператором простого типа

3. Пример:

   (a) $\hat{A}$ — проекция на плоскость xOz

   (b) Матрица в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$: координаты образов базисных векторов, записанных по столбикам

      i. $\hat{A}\vec{i} = \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

      ii. $\hat{A}\vec{j} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

iii. $\hat{A}\vec{k} = \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

iv. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) Найти образ $\vec{x} = (1, 2, 3)$

i. $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

(d) Ранг и образ (I способ):

i. Образ оператора $Im\hat{A} = \{\vec{y} = y_1\vec{i} + y_3\vec{k}\}$ — векторы, параллельные плоскости xOz

ii. Ранг оператора $rang\hat{A} = 2$ — размерность образа

(e) Ранг и образ (II способ):

i. $\vec{y} = A\vec{x}$

ii. $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1\vec{i} + x_3\vec{k}$

iii. $Im\hat{A} = \{\vec{y} = x_1\vec{i} + x_3\vec{k}\}$, $rang\hat{A} = 2$

(f) Ядро и дефект (I способ):

i. $Ker\hat{A} = \{\vec{x} = x_2\vec{j}\}$ — векторы, перпендикулярные плоскости xOz

ii. $defect\hat{A} = 1$ — размерность ядра

(g) Ядро и дефект (II способ):

i. $A\vec{x} = \vec{0}$

ii. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

iii. $x_2 = c$ — свободная переменная

iv. $x_1 = 0$, $x_3 = 0$

v. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c\vec{j}$

(h) Обратный оператор $\hat{A}^{-1}$

i. $detA = 0 \Longrightarrow A^{-1}$ не существует $\Longrightarrow \hat{A}^{-1}$ не существует

(i) Собственные значения и векторы (I способ):

i. $\hat{A}\vec{x} = \vec{x} \Longrightarrow \lambda = 1$
$\vec{x} = x_1\vec{i} + x_3\vec{k}$, $x_1^2 + x_3^2 \neq 0$

ii. $\hat{A}\vec{x} = \vec{0} = 0\vec{x}$, $\lambda = 0$
$\vec{x} = x_2\vec{j}$, $x_2 \neq 0$

(j) Собственные значения и векторы (II способ): формально

(k) Собственные значения и векторы (III способ): из диагонали матрицы

i. $\lambda = 1$: $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_3\vec{k}$

ii. $\lambda = 0$: $\vec{x} = x_2\vec{j}$

(l) $\hat{A}$ — оператор простого типа

i. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ — в пространстве V^3

ii. $Im\hat{A} : \vec{y} = A\vec{x}$

iii. $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

iv. $\vec{y} = (x_1 + x_2 + x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

v. $Im\hat{A} = \{\vec{y} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $rang\hat{A} = 1$

vi. $Ker\hat{A} : \hat{A}\vec{x} = \vec{0}$

vii. $A\vec{x} = \vec{0} \longleftrightarrow (A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$

viii. $Ker\hat{A} = \{\vec{x} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Подготовка к контрольной работе

3.9 Линейный оператор в пространстве матриц

1. Дано:

(a) M_{22}

(b) $M = \{X \in M_{22} : X^T = X\}$ — подпространство симметрических матриц

(c) $\hat{A}X = B^T X B$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Задание:

   (a) Доказать, что $\hat{A}$ является оператором на подпространстве M
   (b) Найти матрицу оператора в каком-нибудь базиме попространства
   (c) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$
   (d) Обратим ли оператор $\hat{A}$. если да, найти $\hat{A}^{-1}$
   (e) Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$
   (f) Является ли оператора $\hat{A}$ оператором простого типа. Если да, то показать оператор в базисе собственных векторов.

3. Решение:

   (a) Доказать, что $\hat{A}$ — линейный оператор
      i. $\hat{A} : M \to M$
      ii. Свойства линейности:
         A. $\hat{A}(X_1 + X_2) = \hat{A}X_1 + \hat{A}X_2$
         B. $\hat{A}(\lambda X) = \lambda \hat{A}X$
      iii. Проверка:
         A. $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$
         B. $\hat{A}X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$
         $= \begin{pmatrix} a & b \\ -a+b & -b+c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$
         $= \begin{pmatrix} a & -a+b \\ -a+b & a-2b+c \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A} : M \to M$
         C. $\hat{A}(X_1 + X_2) = B^T(X_1 + X_2)B =$
         $= B^T X_1 B + B^T X_2 B = \hat{A}X_1 + \hat{A}X_2$
         D. $\hat{A}(\lambda X) = B^T(\lambda X)B = \lambda B^T X B = \lambda \hat{A}X$
         E. Вывод: $\hat{A}$ — линейный оператор на M

   (b) Выберем базис подпространства M и построим матрицу оператора в этом базисе
      i. $a = 1,\ b = c = 0,\ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
      ii. $a = 0,\ b = 1,\ c = 0,\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
      iii. $a = 0,\ b = 0,\ c = 1,\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
      iv. $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$
      $= aE_1 + bE_2 + cE_3 = (a, b, c)$ — координаты в базисе E_1, E_2, E_3.

v. $\hat{A}E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim (1,-1,1)$

$\hat{A}E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \sim (0,1,2)$

$\hat{A}E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim (0,0,1)$

(c) Ядро и образ:

i. $Ker\hat{A} : \hat{A}X = 0$

ii. $AX = 0$

iii. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

iv. $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

v. $Ker\hat{A} = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$

vi. $defect\hat{A} = \dim Ker\hat{A} = 0$ — по определению

vii. $rang\hat{A} = rangA = \dim M - defect\hat{A} = 3$

viii. $\dim M = rang\hat{A} \Longrightarrow Im\hat{A} = M$

(d) Обратимость оператора

i. $\dim A = 1 \neq 0 \Longrightarrow \hat{A}^{-1}$ существует

ii. $A^{-1} = ...$ — матрица обратного оператора

(e) Собственные значения и собственные векторы

i. $|A - \lambda E| = 0$

ii. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0$

Часть V

Лекция 10 (20.04.15) “Билинейные и квадратичные формы”

4 Билинейные и квадратичные формы

1. Пусть:

(a) V — векторное пространство

(b) $\hat{A} : (x, y) \longrightarrow \mathbb{R}$

(c) $\hat{A}(\vec{x}, \vec{y}) = c$

2. Тогда:

   (a) $\hat{A}(\vec{x_1} + \vec{x_2}, \vec{y}) = \hat{A}(\vec{x_1}, \vec{y}) + \hat{A}(\vec{x_2}, \vec{y})$
   $\hat{A}(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda\hat{A}(\vec{x}, \vec{y})$

   (b) $\hat{A}(\vec{x}, \vec{y_1} + \vec{y_2}) = \hat{A}(\vec{x}, \vec{y_1}) + \hat{A}(\vec{x}, \vec{y_2})$
   $\hat{A}(\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \lambda\hat{A}(\vec{x}, \vec{y})$

3. Пример в пространстве V^3:$(\vec{x}, \vec{y})$ — скалярное произведение

4. Определение: Билинейная форма $\hat{A}$ называется **симметрической**, если $\hat{A}(\vec{x}, \vec{y}) = \hat{A}(\vec{y}, \vec{x})$, $\forall \vec{x}, \vec{y}$. Таким образом, симметричная билинейная форма имеет симметричную матрицу в любом базисе.

4.1 Координатная и векторно-матричная запись билинейной формы

1. Пусть:

   (a) V — векторное пространство

   (b) $\hat{A}(\vec{x}, \vec{y})$ — билинейная форма

2. Тогда:

   (a) $S = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ — базис V

   (b) Вычислим значение билинейной формы для каждой пары базисных векторов: $\hat{A}(\vec{e_i}, \vec{e_j}) = a_{ij}$ и составим хиз полученных значений матрицу, которая называется матрицей **билинейной формы в базисе** S.

   (c) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

      i. $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

      ii. $\vec{y} = y_1\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + y_3\vec{e_3} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

   (d) $\hat{A}(x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}, y_1\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + y_3\vec{e_3}) =$
   $= x_1y_1a_{11} + x_1y_2a_{12} + x_1y_3a_{13} +$
   $+ x_2y_1a_{21} + x_2y_2a_{22} + x_2y_3a_{23} +$
   $+ x_3y_1a_{31} + x_3y_2a_{32} + x_3y_3a_{33} =$
   $= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

(e) $\hat{A}(\vec{x},\vec{y}) = X^T AY$ — **векторно-матричная запись**

(f) $\hat{A}(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}$ — **координатная запись**

3. Пример:

   (a) В пространстве V^3: $\hat{A}(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\vec{y})$ — скалярное произведение

      i. $A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

      ii. $(\vec{x},\vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

4. $\phi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & ... & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = X^T AY = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_iy_j$

4.2 Преобразование матрицы билинейной формы при замене базиса

1. Пусть:

   (a) V — векторное пространство

   (b) $\hat{A}(\vec{x},\vec{y})$ — билинейная форма

   (c) $S_1 = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ — старый базис

   (d) $S_2 = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ — новый базис

   (e) A_1 — матрица билинейной формы в старом базисе

   (f) A_2 — матрица билинейной формы в новом базисе

   (g) P — матрица перехода от S_1 к S_2

2. Тогда:

   (a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}_{S_1} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}_{S_2}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}_{S_1} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ ... \\ y'_n \end{pmatrix}_{S_2}$

   (b) $\hat{A}(\vec{x},\vec{y}) = X^T A_1 Y = (X')^T A_2 Y$

   (c) $X = PX'$, $Y = PY'$

   (d) $\hat{A}(\vec{x},\vec{y}) = (PX')^T A_1(PY') =$
   $= (X')^T P^T A_1 PY'$

   (e) $A_2 = P^T A_1 P$ — формула преобразования матрицы билинейной формы

4.3 Квадратичная форма

1. Определение:

   (a) Пусть:

      i. $\hat{A}(\vec{x},\vec{y})$ — симметричная билинейная форма

   (b) Тогда:

      i. **Квадратичной формой**, порожденной симметрической билинейной формой $\hat{A}$, называется функция $\phi(\vec{x}) = \hat{A}(\vec{x},\vec{x})$

   (c) Пример:

      i. $\hat{A}(\vec{x},\vec{y}) = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos\phi = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

         A. $\phi(\vec{x}) = \hat{A}(\vec{x},\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |\vec{x}|^2$

2. Утверждение: Между симметричными билинеными формами и квадратичными формами в векторном пространстве V существует взаимно однозначное соответствие.

   (a) $\phi(\vec{x}+\vec{y}) = \hat{A}(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) =$
   $= \hat{A}(\vec{x},\vec{x}) + \hat{A}(\vec{x},\vec{y}) + \hat{A}(\vec{y},\vec{x}) + \hat{A}(\vec{y},\vec{y}) =$
   $= \phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y}) + 2\hat{A}(\vec{x},\vec{y})$

   (b) $\hat{A}(\vec{x},\vec{y}) = \frac{\phi(\vec{x}+\vec{y})-\phi(\vec{x})-\phi(\vec{y})}{2}$

3. $\phi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & ... & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ — векторно-матричная и координатная запись квадратичной формы.

4. Примеры:

   (a) $\phi(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_3^2 4x_1x_2 - 6x_1x_3$

      i. $\phi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1-2\alpha & -1 \\ 1-2\alpha & 6\alpha & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

      i. $\phi(\vec{x}) = (\alpha+1)x_1^2 + 6\alpha x_2^2 + x_3^2 +$
      $+2(1-2\alpha)x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

4.4 Канонический вид квадратичной формы

1. Определение: Если квадратичная форма представлена в виде $\phi(\vec{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + ... + \alpha_n x_n^2$, то квадратичная форма записана в **каноническом виде**.

   (a) Если $\alpha_i = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \end{cases}$, то квадратичная форма записана в **нормальном виде**.

   (b) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ — матрица квадратичной формы $\phi(\vec{x})$ в каноническом базисе.

   (c) **Любую** квадратичную форму можно привести к каноническому виду.

4.4.1 Методы приведения к каноническому виду:

1. Метод Лагранжа (выделение полных квадратов)

   (a) $\phi(\vec{x}) = \underline{x_1^2} + 3x_2^2 - 4x_3^2 + \underline{4x_1x_2} - \underline{6x_1x_3}$

      i. Выберем квадрат какой-нибудь переменной и сгруппируем <u>**все**</u> слагаемые, содержащие эту переменную:

      ii. $\phi(\vec{x}) = (x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3) + 3x_2^2 - 4x_3^2 =$
      $= (x_1^2 + 2x_1(2x_2 - 3x_3) + (2x_2 - 3x_3)^2) -$
      $-(2x_2 - 3x_3)^2 + 3x_2^2 - 4x_3^2 =$
      $= (x_1 + 2x_2 - 3x_3)^2 - \underline{x_2^2} - 13x_3^2 + \underline{12x_2x_3} =$
      $= (x_1 + 2x_2 - 3x_3)^2 -$
      $-(x_2^2 - 12x_2x_3 + 36x_3^2) + 36x_3^2 - 13x_3^2 =$
      $= (x_1 + 2x_2 - 3x_3)^2 + (x_2 - 6x_3)^2 + 23x_3^2 =$
      $= y_1^2 - y_2^2 + 23y_3^2$

   (b) Метод ортогональных преобразований

4.5 Закон инерции квадратичных форм

1. i_+ — **положительный индекс инерции** квадратичной формы — количество положительных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы.

2. i_- — **отрицательный индекс инерции** квадратичной формы — количество отрицательных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы.

3. r — **ранг** — количество ненулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы

4. Теорема (закон инерции квадратичных форм): Индексы инерции и ранг формы не зависят от способа приведения формы к каноническому виду.

4.6 Знакоопределенные квадратичные формы

1. Определения:
   (a) Квадратичная форма $\phi(\vec{x})$ называется **положительно определенной**, если $\phi(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{0}$
   (b) Квадратичная форма $\phi(\vec{x})$ называется **отрицательно определенной**, если $\phi(\vec{x}) < 0, \forall \vec{x} \neq \vec{0}$
   (c) Иначе: Форма **общего вида**
2. По каноническому виду:
   (a) $i_+ = r = \dim V \Rightarrow$ положительно определена
   (b) $i_- = r = \dim V \Rightarrow$ отрицательно определена
3. **Критерий Сильвестра**
   (a) Пусть:
      i. V - векторное пространство
      ii. S - базис
      iii. $\phi(\vec{x})$ - квадратичная форма
      iv. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица квадратичной формы $\phi(\vec{x})$ в базисе S
   (b) Тогда:
      i. Главные миноры матрицы A
         A. $M_1 = a_{11}$
         B. $M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
         C. ...
         D. $M_n = detA$
      ii. Квадратичная форма $\phi(\vec{x})$ **положительно определена** тогда и только тогда, когда главные миноры ее матрицы A **положительны**.
      iii. Следствие: Форма $\phi(\vec{x})$ **отрицательно определена**, когда главные миноры имею чередующиеся знаки, начиная с минуса.

(c) Пример:

i. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\phi(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$

A. $M_1 = 1 > 0$

B. $M_2 = 1 - 4 < 0$

C. $\Longrightarrow$ форма общего вида

ii. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}$

A. $M_1 = 1 > 0$

B. $M_2 = 5 - 4 = 1 > 0$

C. $M_3 = 6 - 2 - 3 = 1 > 0$

D. $\Longrightarrow$ форма положительно определена

4.7 Скалярное произведение

1. Определение: $(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x}||\vec{y}| \cos\phi$

2. Свойства:

   (a) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$

   (b) $(\vec{x_1} + \vec{x_2}, \vec{y}) = (\vec{x_1}, \vec{y}) + (\vec{x_2}, \vec{y})$

   (c) $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$

3. Координатная форма:

   (a) $(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

4. Длина и угол:

   (a) $|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

   (b) $\cos\phi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|}$

   (c) $\vec{x} \perp \vec{y} \Longleftrightarrow (\vec{x}, \vec{y}) = 0$

5. Определение:

   (a) Пусть:

   i. V - векторное пространство

   ii. $(\vec{x}, \vec{y})$ - числовая функция от двух векторных аргументов

   (b) Тогда:

i. Эта функция называется **скалярным произведением**, если выполнены следующие свойства:
   A. $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$
   B. $(\vec{x_1} + \vec{x_2}, \vec{y}) = (\vec{x_1}, \vec{y}) + (\vec{x_2}, \vec{y})$
   C. $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$

ii. Таким образом, **скалярное произведение** - это симметричная билинейная форма, причем соответствующая квадратичная форма **положительно определена**.

iii. Векторное пространство V, в котором задано скалярное произведение, называется **евклидовым пространством**.

4.8 Матрица Грама

1. Пусть:

   (a) $S = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ - базис

   (b) $(\vec{x}, \vec{y})$ - скалярное произведение

2. Тогда:

   (a) $g_{ij} = (\vec{e_i}, \vec{e_j})$

   (b) $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$ - матрица Грама скалярного произведения

   (c) $(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} x_i y_j$

3. Критерии матрицы Грама:

   (a) $(\vec{x}, \vec{y})$ - симметрично $\Leftrightarrow G^T = G$

   (b) $(\vec{x}, \vec{x}) > 0 \Leftrightarrow G$ удовлетворяет критерию Сильвестра

4. Определим понятие длины и угла в пространстве V:

   (a) $|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$

      i. Корректность определения длины следует из пункта 4 определения скалярного произведения.

   (b) $\cos\phi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|}$

      i. Следуя из неравенства Коши-Буняковского формула корректна.

   (c) $\vec{x}, \vec{y}$ - ортогональны ($\vec{x} \perp \vec{y}$), если $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$

4.9 Неравенство Коши-Буняковского

1. $|(\vec{x},\vec{y})| \leq ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||$
2. Доказательство:
   (a) $(\vec{x}+\lambda\vec{y}, \vec{x}+\lambda\vec{y}) = (\vec{x},\vec{x}) + 2\lambda(\vec{x},\vec{y}) + \lambda^2(\vec{y},\vec{y}) \geq 0$ при $\forall\lambda$
   (b) $D \leq 0$: $D = 4(\vec{x},\vec{y})^2 - 4(\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y}) \leq 0$
   (c) $(\vec{x},\vec{y})^2 \leq ||\vec{x}||^2||\vec{y}||^2$
   (d) $|(\vec{x},\vec{y})| \leq ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||$
3. Следствие (неравенство треугольника): $||\vec{x}+\vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$

Подготовка к контрольной работе

1. Дано:
   (a) $S = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$
   (b) $G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
   (c) $\vec{x} = (1,1)_S$, $\vec{y} = (2,-1)_S$
2. Найти длины базисных векторов и углы между ними
3. Решение:
   (a) $||\vec{e_1}|| = \sqrt{(\vec{e_1},\vec{e_1})} = \sqrt{g_{11}} = \sqrt{2}$
   (b) $||\vec{e_2}|| = \sqrt{(\vec{e_2},\vec{e_2})} = \sqrt{g_{22}} = 2$
   (c) $\cos\phi = \frac{(\vec{e_2},\vec{e_2})}{||\vec{e_1}|| \cdot ||\vec{e_2}||} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$
   (d) $\phi = \arccos(-\frac{1}{2\sqrt{2}})$
   (e) $(\vec{x},\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$
   (f) $||\vec{x}|| = \sqrt{4} = 2$
   (g) $(\vec{y},\vec{y}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 16$
   (h) $||\vec{y}|| = \sqrt{16} = 4$
   (i) $(\vec{x},\vec{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$
   (j) $\cos\alpha = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||} = \frac{-1}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{8}$

Часть VI

Лекция 11 (18.05.15) “Ортонормированный базис”

4.10 Пример

1. Дано:
   (a) $G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 12 \end{pmatrix}$ - матрица Грама в базисе S
   (b) $\vec{x} = (1, 1, 0)$
   (c) $\vec{y} = (0, -2, 1)$
2. Найти:
   (a) Длины базисных векторов и углы между ними
   (b) Длины векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и угол между ними
3. Решение:
   (a) Длины базисных векторов:
      i. $|\vec{e_1}| = \sqrt{(\vec{e_1}, \vec{e_1})} = \sqrt{2}$
      ii. $|\vec{e_2}| = \sqrt{(\vec{e_2}, \vec{e_2})} = \sqrt{3}$
      iii. $|\vec{e_3}| = \sqrt{(\vec{e_3}, \vec{e_3})} = 2\sqrt{3}$
      iv. $\alpha = \arccos(\frac{(\vec{e_1}, \vec{e_2})}{|\vec{e_1}||\vec{e_2}|}) = \arccos(\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}) = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{6}})$
      v. $\beta = \arccos(\frac{(\vec{e_1}, \vec{e_3})}{|\vec{e_1}||\vec{e_2}|}) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$
      vi. $\gamma = \arccos(\frac{(\vec{e_2}, \vec{e_3})}{|\vec{e_2}||\vec{e_3}|}) = \arccos(\frac{5}{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}) = \arccos(\frac{5}{6})$
   (b) $|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$
   (c) $(\vec{x}, \vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3$, $|\vec{x}| = \sqrt{3}$
   (d) $|\vec{y}| = \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})}$
   (e) $(\vec{y}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$, $|\vec{y}| = 2$
   (f) $\cos\phi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|}$
   (g) $(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$
   (h) $\cos\phi = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $\phi = \arccos(\frac{1}{2\sqrt{3}})$

4.11 Ортонормированный базис

1. Пусть:
    (a) V - евклидово пространство
    (b) $S = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}\}$
2. Тогда:
    (a) Если $\vec{e_i} \perp \vec{e_j}, i \neq j$, то S - **ортогональный базис**
    (b) $g_{ij} = (\vec{e_i}, \vec{e_j}) = \begin{cases} |\vec{e_i}|^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$
    (c) $G = \begin{pmatrix} |\vec{e_1}|^2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & |\vec{e_2}|^2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & |\vec{e_n}|^2 \end{pmatrix}$
    (d) $(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} =$
    $= |\vec{e_1}|^2 x_1 y_1 + ... + |\vec{e_n}|^2 x_n y_n$
    (e) Если $\vec{e_i} \perp \vec{e_j}, i \neq j$ и $|\vec{e_i}|^2 = 1$, то S - **ортонормированный базис**
    (f) $g_{ij} = (\vec{e_i}, \vec{e_j}) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \Rightarrow G = E$
    (g) $(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} =$
    $= x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$

4.12 Алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта

$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ - матрица Грама в базисе $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$

1. Построим ортогональный базис:
    (a) $\vec{f_1} = \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
    (b) $\vec{f_2} = \vec{e_2} + \alpha \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
    (c) Коэффициент α подберем таким образом, чтобы векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ были ортогональны

(d) $(\vec{f_1}, \vec{f_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = 2\alpha - 1 = 0,\ \alpha = \frac{1}{2}$

(e) Проверка: $G' = P^T G P$

i. $G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{f_1} \perp \vec{f_2}$

ii. $|\vec{f_1}| = \sqrt{2},\ |\vec{f_2}| = \sqrt{\frac{5}{2}}$

2. Нормируем базис $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}\}$

(a) $\vec{g_1} = \frac{\vec{f_1}}{|\vec{f_1}|} = \frac{\vec{f_1}}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{g_2} = \frac{\vec{f_2}}{|\vec{f_2}|} = \frac{\vec{f_2}}{\sqrt{\frac{5}{2}}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

(c) $\{\vec{g_1}, \vec{g_2}\}$ - ортонормированный базис

4.12.1 Пример для трехмерного пространства

$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 12 \end{pmatrix}$

1. Построим ортогональнгый базис

(a) $\vec{f_1} = \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{f_2} = \vec{e_2} + \alpha \vec{e_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{f_1} \perp \vec{f_2} \Leftrightarrow (\vec{f_1}, \vec{f_2}) = 0$

(d) $(\vec{f_1}, \vec{f_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\alpha - 1 = 0,\ \alpha = \frac{1}{2}$

(e) $\vec{f_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(f) $\vec{f_3} = \vec{e_3} + \beta \vec{e_1} + \gamma \vec{e_2} = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ 1 \end{pmatrix}$

(g) Подберем коэффициенты β и γ таким образом, чтобы $\vec{f_3}$ был ортогонален $\vec{f_1}$ и $\vec{f_2}$.

(h) $\vec{f_3} \perp \vec{f_1} \Leftrightarrow (\vec{f_1}, \vec{f_3}) = 0$

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ 1 \end{pmatrix} = 2\beta - \gamma = 0$

(j) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}\gamma + 5 = 0$

(k) $\gamma = -2$, $\beta = -1$

(l) $\vec{f_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(m) Проверка: $G' = P^T G P$

i. $G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{f_1} \perp \vec{f_2} \perp \vec{f_3}$

ii. $|\vec{f_1}| = \sqrt{2}$

iii. $|\vec{f_2}| = \sqrt{\frac{5}{2}}$

iv. $|\vec{f_3}| = \sqrt{2}$

2. Нормируем базис:

(a) $\vec{g_1} = \frac{\vec{f_1}}{|\vec{f_1}|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{g_2} = \frac{\vec{f_2}}{|\vec{f_2}|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{g_3} = \frac{\vec{f_3}}{|\vec{f_3}|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

4.12.2 Пример для трехмерного пространства (2 способ)

1. $(\vec{e_1}, \vec{e_3}) = 0 \Rightarrow \vec{e_1} \perp \vec{e_3}$

2. $\vec{f_1} = \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{f_2} = \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. $\vec{f_3} = \vec{e_2} + \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_3} = \begin{pmatrix}\alpha\\1\\\beta\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} G \begin{pmatrix}\alpha\\1\\\beta\end{pmatrix} = 2\alpha - 1 = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$

5. $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix} G \begin{pmatrix}\alpha\\1\\\beta\end{pmatrix} = 5 + 12\beta = 0$, $\beta = -\frac{5}{12}$

6. $\vec{f_3} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\-\frac{5}{12}\end{pmatrix}$

7. Проверка: $G' = P^T G P$

   (a) $G' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\-1 & 3 & 5\\0 & 5 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & -\frac{5}{12}\end{pmatrix} =$
   $= \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 12 & 0\\0 & 0 & \frac{5}{12}\end{pmatrix}$

Образец контрольной работы 5

1. Дана квадратичная форма $\phi(\vec{x})$. Исследовать неопределенность с помощью критерия Сильвестра. Привести к каноническому виду. Выписать индексы инерции и ранг формы.

2. Дана матрица Грама G в базисе $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$. Найти длины базисных векторов и угол между ними. Даны векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Найти то же самое для них. Ортогонализовать базис $\vec{e_1}, \vec{e_2}$.

3. Дана кривая. Привести уравнение кривой к каноническому виду, сделать чертеж. (аналог №4.3 из ТР)

Часть VII

Лекция 12 (25.05.15) “Ортогональные преобразования”

4.13 Ортогональные преобразования

1. Линейный оператор: $A' = P^{-1}AP$
   Квадратичная форма: $A' = P^T A P$

2. P - **ортогональная матрица**, если $P^T = P^{-1}$

3. Утверждение 1:

   (a) Пусть:

      i. V - евклидово пространство
      ii. $S_1 = \{\vec{e_1}, ..., \vec{e_n}\}$
      iii. $S_2 = \{\vec{f_1}, ..., \vec{f_n}\}$
      iv. S_1, S_2 - ортогональные базисы
      v. $P_{S_1 \to S_2}$ - матрица перехода

   (b) Тогда: Матрица P - ортогональная

   (c) Доказательство:

      i. $\begin{cases} G_{S_1} = E \\ G_{S_2} = E \end{cases}$, так как S_1, S_2 - ортонормированные базисы
      ii. $G_{S_2} = P^T G_{S_1} P$
      iii. $E = P^T E P$
      iv. $P^T P = E \Longrightarrow P^T = P^{-1}$

4. Утверждение 2:

   (a) Пусть:

      i. V - векторное пространство
      ii. $\hat{A}$ - линейный оператор
      iii. A - матрица линейного оператора в базисе S
      iv. $A^T = A$

   (b) Тогда: $\hat{A}$ - оператор простого типа (то есть из собственных векторов оператора $\hat{A}$ можно составить базис пространства V)

5. Утверждение 3:

   (a) Пусть:

      i. V - евклидово пространство
      ii. $\hat{A}$ - линейный оператор
      iii. $\vec{x}$ - собственный вектор, соответствующие λ_1
      iv. $\vec{y}$ - собственный вектор, соответствующие λ_2
      v. $\lambda_1 = \lambda_2$
      vi. $A^T = A$

   (b) Тогда: $\vec{x} \perp \vec{y}$

   (c) Доказательство: самостоятельно

4.14 Алгоритм

$\phi(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Пусть:

   (a) A - матрица некоторого линейного оператора $\hat{A}$ в ортонормированном базисе $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$.

2. Найдем собственные векторы и собственные значения линейного оператора $\hat{A}$ и составим новый ортонормированный базис из собственных векторов.

   (a) $|A - \lambda E| = 0$

   (b) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 2 - 3(1-\lambda) = 0$

   (c) $-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 + 2 - 3 + 3\lambda = 0$

   (d) $-\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0$

   (e) $\lambda = 0$:

      i. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, rang = 1$

      ii. $x_2 = a$, $x_3 = b$, $x_1 = -a - b$

      iii. $\vec{x} = \begin{pmatrix} -a-b \\ a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (f) $\lambda = 3$:

      i. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim$
      $\sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, rang = 2$

      ii. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

      iii. $\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = a \\ x_3 = a \end{cases}$

iv. $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(g) Базис из собственных векторов:

i. $\vec{f_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ii. $\vec{f_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

iii. $\vec{f_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Ортогонализуем векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}$

(a) $\vec{f_1}' = \vec{f_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{f_2}' = \vec{f_2} + \alpha\vec{f_1}$

(c) Подбираем α так, чтобы векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ были ортогональны.

(d) $\vec{f_2}' = \begin{pmatrix} -1-\alpha \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$

(e) $(\vec{f_1}, \vec{f_2}') = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} -1-\alpha \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$

(f) $G = E$, так как базис $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ ортонормированный

(g) $\alpha = -\frac{1}{2}$

(h) $\vec{f_2}' = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$

(i) Ортогональный базис из собственных векторов:

i. $\vec{f_1}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ii. $\vec{f_2}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

iii. $\vec{f_3}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Нормируем ортобазис $\{\vec{f_1}', \vec{f_2}', \vec{f_3}'\}$

   (a) $\vec{g_1}' = \frac{\vec{f_1}'}{|\vec{f_1}|} = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

   (b) $\vec{g_2}' = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$

   (c) $\vec{g_3}' = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

5. В базисе $\{\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3}\}$:

   (a) Матрица линейного оператора $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   (b) Матрица квадратичной формы совпадает с матрицей линейного оператора: $A'' = P^T AP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   (c) $\phi(\vec{x}) = 3x_3^2$ - канонический вид квадратичной формы

4.15 Примеры:

1. $\mathbf{9x^2} - \mathbf{4xy} + \mathbf{6y^2} + 16x - 8y - 2 = 0$
   Привести к каноническому виду ортогональным преобразованием. Сделать чертеж.

   (a) Приведем квадратичную форму $\phi(\vec{x}) = 9x^2 - 4xy + 6y^2$ к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

   (b) $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

   (d) $\lambda = 5$:

      i. $(A - 5E)\vec{x} = \vec{0}$

      ii. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

      iii. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $rang = 1$

      iv. $4x - 2a = 0$, $x = \frac{a}{2}$, $y = a$

      v. $\vec{x} = a \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

   (e) $\lambda = 10$:

      i. $(A - 10E)\vec{x} = \vec{0}$

ii. $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

iii. $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $rang = 1$

iv. $x = -2a$, $y = a$

v. $\vec{x} = a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(f) Базис из собственных векторов:

i. $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

ii. $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

(g) В базисе $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$:

i. $A' = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

ii. $\phi(\vec{x}) = 5x_1^2 + 10y_1^2$

(h) Преобразуем координаты:

i. $X' = P^{-1}X$

ii. $X = PX'$

iii. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - 2y_1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2x_1 + y_1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

iv. $l(x) = \frac{-40y_1}{\sqrt{5}}$

(i) Подстановка:

i. $5x_1^2 + 10y_2^1 - \frac{40y_1}{\sqrt{5}} - 2 = 0$

ii. $5x_1^2 + 10(y_1^2 - \frac{4y_1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{5}) - \frac{40}{5} - 2 = 0$

iii. $\frac{x_1^2}{2} + \frac{(y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}})^2}{1} = 1$ - эллипс

Часть VIII

Консультация (26.06.15)

1. Зачтенная тема дает один плюс к теме на экзамене, но задачи может быть две. Зачеркивается любая задача на выбор.

2. Оценивание:

   (a) 5 баллов + теория - **"3"**

   (b) От 8 баллов - **"5"**

3. Время на решение: 90 минут